Thomas H. Dawson

OFFSHORE STRUCTURAL ENGINEERING

PRENTICE-HALL, INC.
Englewood Cliffs, New Jersey 07632

Т. Доусон

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СООРУЖЕНИЙ МОРСКОГО ШЕЛЬФА

Перевод с английского В. А. Смелова и К. Н. Шхинека

ЛЕНИНГРАД
„СУДОСТРОЕНИЕ"
1986

ББК 39.49
Д71
УДК 629.124.74:622.242 001.63

Научные редакторы: канд. техн. наук
Д. В. МАРЧЕНКО, канд. техн. наук
В. А. СМЕЛОВ, докт. физ.-мат. наук
К. Н. ШХИНЕК

Доусон Т.

Д71 Проектирование сооружений морского шельфа. Пер. с англ. – Л.: Судостроение, 1986, 288 с., ил. (Техника освоения океана). – Пер. изд.: Englewood Cliffs, USA, 1983.

ИСБН

Изложены общие принципы проектирования опорных конструкций стационарных буровых установок, а также методы расчета прочности конструкций и их устойчивости при внешних воздействиях. Приведены сведения из строительной механики, сопротивления материалов, механики грунтов, гидравлики волн, динамики сооружений. Книга иллюстрирована простыми и четкими схемами, рисунками реальных объектов.

Книга предназначена для инженеров, занимающихся строительством сооружений на континентальном шельфе, может быть использована студентами при изучении курса специальных морских гидротехнических сооружений.

Д $\frac{3605030000-061}{048(01)-86}$ 24–86 39.49

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга задумана как введение в курс проектирования стационарных морских гидротехнических сооружений. В ней нашли отражение основы строительной механики и вопросы, связанные с волновыми нагрузками, свайными основаниями и динамической реакцией сооружения, которые в настоящее время приобретают особое значение.

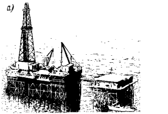
Основные представления базируются целиком на материале, излагаемом в курсах инженерной механики для студентов последних лет обучения. Требуемый для понимания материала уровень математической базы ограничен пределами, достаточными для проведения обычных вычислений и решения дифференциальных уравнений. Для лучшего усвоения материала и иллюстрации применения полученных формул изложение теории в книге сопровождается большим количеством числовых примеров.

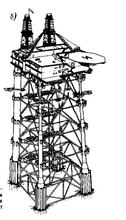
За общим введением, представленным главой 1, следует изложение теории расчета стержневых систем в виде ферм и рам – глава 2. Приводя эту теорию, автор счел целесообразным использовать современные матричные методы, имея в виду применение ЭВМ для решения сложных задач. Такой подход имеет явные преимущества, состоящие в сжатом изложении теории и возможности ее непосредственного применения к решению практических задач без необходимости изучения техники получения приближенных решений. Для читателя, незнакомого с матричной алгеброй, краткое, но вполне достаточное ее изложение приведено в приложении.

В главе 3 рассматриваются нагрузки на сооружения от воздействий окружающей среды. К ним относятся нагрузки от ветра и волн, течения, гидростатического давления, плавающего льда и наносов. Сведения, приведенные в предыдущих двух главах, объединяются главой 4, в которой излагаются методы статического расчета стационарных морских гидротехнических сооружений. Помимо стальных ферменного типа конструкций определенное внимание уделяется бетонным конструкциям с предварительно напряженным или обычным армированием, необходимым для восприятия воздействий окружающей среды. В этой же главе даны основы динамики сооружений, используемые при оценке пригодности статических расчетов для проектируемого сооружения.

Глава 5 знакомит с расчетом оснований морских гидротехнических сооружений. В ней приведены краткое введение в механику грунтов, инженерные способы расчета свай и фундаментов. Предложены приближенные методы учета взаимодействия сооружения и грунтового основания.

Наконец, в главе 6 получили развитие вопросы динамического расчета, кратко изложенные в главе 4; в их числе изменяющиеся во времени волновые нагрузки, системы со многими степенями свободы, динамическая реакция системы на нерегулярное случайное волнение моря и реакция сооружений на сейсмические воздействия.





Эволюция буровых платформ, используемых в Мексиканском заливе: *а* – первая металлическая платформа, установленная в 1947 г. на глубине 6 м; *б* – проект современной конструкции платформы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проектирование морских гидротехнических сооружений – сравнительно новая область инженерного искусства, связанная с конструированием и расчетом морских платформ различного назначения. Она возникла около 1947 г., когда в Мексиканском заливе на открытой акватории была установлена первая, выполненная из стали конструкция. Эта область инженерного искусства отличается от других наличием ряда специфических проблем, связанных с транспортировкой конструкции к месту эксплуатации, постановкой ее на морское дно и обеспечением способности противостоять суровым условиям окружающей среды в течение всего периода эксплуатации. Возникновение новой технологии предопределено развитием нефтедобывающей промышленности и ее потребностями в стационарных платформах для освоения значительных месторождений нефти на морском шельфе. Однако, использование таких сооружений не ограничивается только нуждами указанной отрасли промышленности, важное значение они имеют также для военных и навигационных целей.

Основное назначение книги – изложение основ расчетных методов, используемых при проектировании морских гидротехнических сооружений. В настоящей главе приводится краткий обзор сооружений. Детальному рассмотрению вопросов, связанных с их расчетом, посвящены все последующие главы книги.

1.1. Проектирование стационарных морских гидротехнических сооружений

Проектирование морских сооружений во многом аналогично проектированию наземных сооружений, но имеет и специфику, связанную с тем, что морские сооружения изготовляются в одном месте, а устанавливаются для эксплуатации в другом. Назовем основные этапы творческого процесса при проектировании морского гидротехнического сооружения:

1. Выяснение назначения сооружения.
2. Оценка условий окружающей среды и характеристика места установки сооружения.

3. Предварительное проектирование, в процессе которого основное внимание должно быть уделено выбору способа установки сооружения на месте эксплуатации.

4. Оценка материальных затрат, затруднений, возникающих при изготовлении и установке сооружения, требований к основанию и выбор окончательного конструктивного решения.

5. Установление размеров принятой конструкции и ее деталей, обеспечивающих восприятие заданных эксплуатационных нагрузок и воздействий окружающей среды.

6. Окончательная оценка способности запроектированного сооружения выдерживать нагрузки, возникающие в процессе его транспортировки и постановки на место эксплуатации.

Назначение морского гидротехнического сооружения обычно определяет минимальные значения площади и веса платформы, которая должна быть установлена в определенном месте. Экономичность конструкции опорного основания платформы определяется, в первую очередь, способом постановки ее на место эксплуатации, воздействиями окружающей среды, а также местными условиями. Воздействие окружающей среды, т. е. влияние на прочность конструкции ветра, течения, волн, а также действия плавающего льда и землетрясений, должно быть изучено заранее. К местным условиям относятся глубина воды и характеристика грунтового основания, причем последнее особенно важно для расчета фундамента сооружения.

После получения перечисленной информации можно переходить к предварительной проработке способа постановки сооружения на место эксплуатации с учетом заданных эксплуатационных нагрузок и приближенных оценок нагрузок от основных внешних воздействий. В большинстве случаев основными являются волновые нагрузки, хотя иногда значительную опасность для сооружения могут представлять ледовые воздействия или землетрясения. На стадии предварительного проектирования некоторые варианты конструктивных решений могут быть отвергнуты, как экономически невыгодные или неприемлемые с точки зрения технологии изготовления или способа постановки сооружения на морское дно. Другие варианты могут потребовать более подробного изучения многих вопросов (например, вопроса о стоимости), возникающих на пути реализации проектного решения. В конце концов выбирают форму конструкции, способ постановки на дно, уточняют размеры и детали, обеспечивающие сооружению способность противостоять внешним воздействиям. Эксплуатационные нагрузки рассчитывают прямым методом, а воздействия окружающей среды путем последовательных приближений. Это объясняется тем, что изменение размеров элементов конструкции приводит к изменению нагрузок на эти элементы и на сооружение в целом. И наконец, запроектированное сооружение должно быть проверено на способность выдерживать нагрузки, возникающие в процессе транспортировки и постановки на дно. Эти нагрузки могут оказаться весьма значительными, и пренебрежение ими может привести к серьезным повреждениям сооружения еще до начала его эксплуатации.

1.2. Стационарные морские гидротехнические сооружения

Конструкции с ферменным опорным основанием

Один из наиболее распространенных типов морских гидротехнических сооружений показан на рис. 1.1. Сооружения этого типа состоят из собранного на береговой строительной базе металлического опорного основания, имеющего вид пространственной фермы

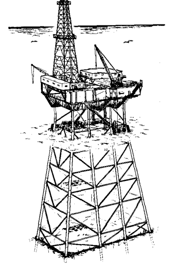


Рис. 1.1. Конструкция современной буровой платформы на опорном основании ферменного типа.

пирамидальной формы, простирающейся от морского дна до некоторой отметки над водной поверхностью, и металлического, заранее (до установки) изготовленного верхнего строения (платформы). Платформа опирается на трубчатые сваи, забитые в грунтовое основание через колонны опорного основания. Эти сваи не только поддерживают платформу, но и фиксируют сооружение в целом от сдвигающих нагрузок, вызванных ветром, волной и течением.

Конструкция, показанная на рис. 1.1, характерна для современных сооружений, эксплуатируемых на глубинах до 110 м. Сооружения такого типа впервые были установлены у побережья шт. Луизиана в Мексиканском заливе в конце 40-х годов*. Первое сооружение было установлено на глубине 6 м в 1947 г. [15]. Вскоре было установлено второе, аналогичное по конструкции, сооружение на глубине 15 м. В 50-х годах глубины воды, на которых устанавливали такие сооружения, достигли 30 м. И хотя первые сооружения имели опорное основание и сваи, поддерживающие верхнее строение, они не получили еще столь компактную форму, как сооружение, изображенное на рис. 1.1. Они включали несколько расположенных рядом небольших опорных оснований, через многочисленные и часто расположенные колонны которых забивали сваи.

К середине 60-х годов сооружения приобрели форму, очертания которой видны на рис. 1.1, и устанавливались уже на глубинах 90 м и больших. В течение 70-х годов глубины, на которых устанавливали такие сооружения, увеличились более чем вдвое и достигли 300 м. В настоящее время в Мексиканском заливе эксплуатируются многие сотни платформ, и продолжается установка новых. Хотя существуют сооружения – рекордсмены по глубине установки, все же большая часть сооружений рассматриваемого типа используется на глубинах менее 90 м. При проектировании этих сооружений определяющую роль играет их конструкция и принятый способ установки на место эксплуатации [16].

Опорное основание обычно изготовляется на берегу в горизонтальном положении и затем передвигается на баржу с плоским настилом и буксируется на ней к месту постановки на морском шельфе. Там опорное основание сдвигается с баржи и с помощью плавучего крана устанавливается в вертикальном положении на дно. Вслед за этим через колонны опорного основания в грунт с помощью копра, находящегося на судне, погружаются сваи. По достижении проектной глубины забивки свай верхние их части, выступающие над опорным основанием, срезают, и далее устанавливают верхнее строение, которое приваривают к головам свай. В завершенном виде вес верхнего строения сооружения полностью воспринимается сваями, а опорное основание препятствует их относительному боковому смещению. Последовательность производства работ по сборке сооружения показана на рис. 1.2.

Операции по сборке и установке сооружения (рис. 1.2) характеризуют лишь часть многочисленных факторов, которые должны быть учтены в процессе проектирования. Например, вес опорного основания, если оно представляет единое целое, не может превосходить грузоподъемность кранового оборудования на сборочной площадке, кроме того, вес и размеры опорного основания не должны превосходить грузоподъемность баржи, на которой оно буксируется. Опорное основание должно быть рассчитано на нагрузки, возникающие при переносе ее с берега на баржу. В свою очередь оно должно быть рассчитано и на нагрузки, возникающие при спуске с баржи на воду. После спуска на воду опорное основание должно обладать достаточной плавучестью. Вместе с тем оно должно быть сконструировано так, чтобы с помощью плавучего крана и путем балластировки водой отдельных отсеков оно могло быть приведено в вертикальное положение и установлено на дно. Расчетная глубина забивки свай, погружаемых через колонны опорного основания для фиксации его на месте и для восприятия веса верхнего строения, должны соответствовать рабочим характеристикам копра. Наконец, вес верхнего строения или основных его модулей не должен

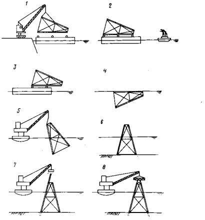


Рис. 1.2. Последовательность операций по транспортировке и установке опорного основания ферменного типа.

* В СССР аналогичные сооружения возведены впервые на Каспийском море в 1936 г. – *Здесь и далее примечания переводчиков.*

превышать грузоподъемность плавучего крана, используемого для монтажа верхнего строения.

Последовательность работ, показанная на рис. 1.2, по сборке сооружений с очень громоздкими опорными основаниями, предназначенных для глубоководных акваторий, должна быть изменена. В этом случае опорное основание разделяют на два или несколько модулей, каждый из которых доставляют к месту установки отдельно, после чего их собирают. Отдельные модули основания могут быть соединены до его постановки на морское дно, или их можно устанавливать друг на друга и соединять между собой в окончательном вертикальном положении.

Иная последовательность установки опорного основания, показанного на рис. 1.2, используется для больших сооружений. Она заключается в придании ему собственной плавучести, достаточной для буксировки на плаву, что позволяет избежать необходимости спуска с баржи. Обычно это достигается увеличением размеров колонн. После спуска на воду со сборочной береговой площадки опорное основание буксируют к месту установки и ставят на дно в вертикальном положении путем балластировки отсеков колонн.

В противоположность этому для легких опорных оснований, предназначенных для относительно мелких акваторий, можно не предусматривать операцию спуска с баржи на воду, а поднимать их с баржи и устанавливать на дно в вертикальном положении плавучим краном.

Восьмиколонная конструкция опорного основания, показанная на рис. 1.1, является стандартной для сооружений, предназначенных для глубин около 110 м. Незначительная модификация конструкции становится необходимой, если сооружение располагается на очень слабых осадочных породах. Она состоит в том, что для повышения несущей способности основания кроме основных свай применяются дополнительно „окаймляющие" сваи, размещенные по периметру опорного основания. Они погружаются через короткие направляющие цилиндры (кондукторы), прикрепленные к опорному основанию, с поверхности воды с помощью подбабка (передаточной штанги). Связь „окаймляющих" свай с опорным основанием достигается нагнетанием бетонного (цементного) раствора в пространство между этими сваями и направляющими цилиндрами.

Типичная конструкция опорного основания буровой платформы, модифицированная описанным выше образом, изображена на рис. 1.3. Это сооружение расположено в Мексиканском заливе у побережья шт. Луизиана на глубине около 90 м. Верхнее строение имеет в плане размеры 18 х 36 м и массу около 900 т. Масса опорного основания около 1800 т. Восемь трубчатых свай *1*, забитых через колонны опорного основания, имеют наружный диаметр 1,22 м и толщину стенки около 25 мм. В дополнение к ним по периметру основания забиты четыре „окаймляющие" сваи *2*. Все сваи забиты в грунт с наклоном 1 : 7 к вертикали на глубину от 60 до 90 м. Сооружение рассчитано на суммарную горизонтальную нагрузку от ветра, волны и течения, равную 13,5 МН, соответствующую максимальным штормовым условиям. Поскольку волновые нагрузки максимальны у поверхности воды, то равнодействующая

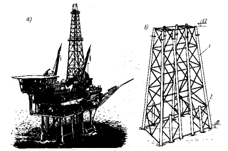


Рис. 1.3. Опорное основание с „окаймляющими" сваями буровой платформы, используемой на шельфе Мексиканского залива [26] (у побережья шт. Луизиана) : *а* – общий вид сооружения; *б* – опорное основание.

нагрузок приложена почти у самого верха сооружения. Поэтому сооружение рассчитано и на опрокидывающий момент 1000 МН·м. Эти нагрузки и момент в пять–семь раз больше действующих при максимальном ветре на 25-этажное, т. е. 90-метровой высоты, здание на суше.

Для сооружений, предназначенных для использования на глубинах свыше 110 м, могут быть рассмотрены две модификации восьмиколонной конструкции опорного основания. В первой из них увеличено число колонн, так что вместе с „окаймляющими" сваями они могут воспринимать дополнительные нагрузки от верхнего строения и противостоять увеличившимся горизонтальным нагрузкам и опрокидывающему моменту. В другом конструктивном решении принято во внимание то обстоятельство, что чем выше опорное основание и шире его база, тем меньше участие в восприятии опрокидывающего момента имеют средние сваи. Поэтому в противоположность предыдущему решению в основной восьмиколонной конструкции, как показывают расчеты, можно исключить средние сваи и расположить все сваи по четырем углам сооружения [16].

Морские нефтедобывающие платформы с опорными основаниями в виде ферм установлены не только на побережье шт. Луизиана, но и вблизи шт. Калифорния. Они подобны тем, что эксплуатируются в Мексиканском заливе, но помимо нагрузок от ветра, волнения и течения рассчитаны на сейсмические воздействия. Представляет интерес описание одного из таких сооружений, приведенное в работе [23]. Сооружения рассматриваемого типа эксплуатируются в различных

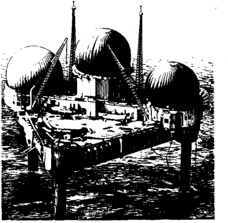


Рис. 1.4. Одна из „Техасских башен", установленных в 50-х годах в Атлантическом океане у северо-восточного побережья США для нужд обороны.

районах мира, в том числе в известном жестокими штормами Северном море, где продолжают возрастать объемы буровых работ и нефтедобычи.

Помимо нефтедобычи морские гидротехнические сооружения в виде пространственных ферм применяются также в военных целях. Действительно, первым примером использования платформ в областях, не связанных с бурением нефтяных скважин, было решение задач обороны. Система таких платформ, на северо-востоке США известных под названием „Техасские башни", составляла в 50-х годах часть системы дальнего обнаружения ПВО США. Радиолокационные системы, устанавливаемые на этих платформах, были предназначены для обнаружения самолетов противника на дальних подступах, чего в ту пору было невозможно достичь иным способом. Одна из нескольких таких башен, установленных на шельфе Атлантики, показана на рис. 1.4.

Более современными из имеющих военное назначение сооружениями являются четыре платформы, установленные в 1977 г. у побережья

шт. Северная Каролина и находящиеся в распоряжении командования авиации ВМС США. Размещенные на этих платформах радиолокационные станции автоматического сопровождения цели регистрируют действия пилотов ВМС и помогают им проложить экономичные и безопасные курсы над обширными ненаселенными пространствами. Одна из башен

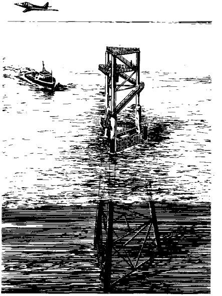


Рис. 1.5. Одна из платформ, установленных у побережья шт. Сев. Каролина для нужд авиации ВМС США.

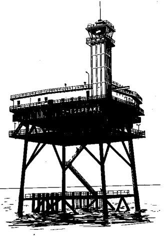


Рис. 1.6. Башня-маяк, установленная у атлантического побережья США.

показана на рис. 1.5. Рассчитываются такие башни аналогично платформам, предназначенным для бурения нефтяных скважин за тем исключением, что, как и для „Техасских башен", вследствие уменьшения массы верхнего строения, для них достаточно трех опорных колонн.

В течение 60-х годов береговая охрана США установила на шельфе Атлантики несколько платформ для навигационных целей. Подобно „Техасским башням", эти сооружения демонстрируют еще одну область применения платформ, не связанную с добычей нефти. Расчету таких сооружений посвящены работы [10, 38]. Платформы были установлены для замены устаревших плавучих маяков. Хотя основной причиной замены плавучих маяков платформами были экономические соображения, несомненными преимуществами новых сооружений являются их

фиксированное положение и функциональная надежность при любой погоде. Одна из таких башен-маяков, установленная на входе в Чесапикский залив у побережья шт. Виргиния, показана на рис. 1.6.

Ледостойкие конструкции

Первое существенное изменение конструкции морских платформ произошло в 60-х годах при проектировании сооружений, предназначенных для эксплуатации в заливе Кука у Аляски. Обширные ледовые поля, движущиеся, например, во время приливов, могут ударяться о сооружение и оказывать на него нагрузки бо́льшие, чем штормовые ветер, волны и течение. В конструкциях сооружений, предназначенных для этого района, удалены диагональные и горизонтальные связи в зоне, соответствующей приливным изменениям горизонта воды, а также там, где они могут быть разрушены плавающим льдом. Верхнее строение у таких сооружений опирается на четыре колонны большого диаметра. Внутри каждой колонны по периметру забито несколько свай [25]. Такие конструкции получили название *ледостойких*. На рис. 1.7 показаны одно из таких сооружений в период его эксплуатации и детали опорного основания. Колонны опорного основания имеют диаметр 4,6 м и высоту 42 м, через каждую из них в грунт на глубину до 27 м забито по восемь свай диаметром 0,75 м.

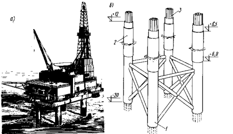


Рис. 1.7. Ледостойкая конструкция, разработанная для использования в заливе Кука (Аляска) : *а* – на месте эксплуатации; *б* – опорное основание [26].

1 – опорная колонна; *2* – защитный противоледовый кожух; *3* – сваи.

2–566

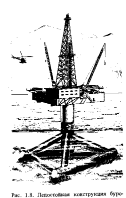


Рис. 1.8. Ледостойкая конструкция буровой платформы типа моноpод, установленная в 1966 г. в заливе Кука (Аляска).

Рассчитанные в основном на восприятие ледовых воздействий, эти сооружения устанавливают так же, как обычные. Опорное основание собирают на береговой площадке, буксируют к месту эксплуатации, устанавливают в вертикальном положении и закрепляют с помощью свай, забиваемых через колонны. Благодаря большому диаметру колонн, опорное основание обладает достаточной плавучестью, что позволяет обойтись без специальных барж для транспортировки.

Кроме конструкций, имеющих по четыре колонны в опорном основании, в заливе Кука установлена конструкция с одной колонной (моноpод). Необходимая для буксировки плавучесть создается здесь благодаря резервуарам, прикрепляемым к нижней части опорного основания. Для закрепления сооружения на дне и поддержания верхнего строения в грунт через опорные колонны забиваются основные сваи, а по периметру основания „окаймляющие" сваи (рис. 1.8).

Гравитационные конструкции

Опорные основания ферменного типа, описанные выше, обычно используются на мягких грунтах в районах, подобных Мексиканскому заливу, где глубоко забитые сваи удерживают все сооружение от сдвига и воспринимают вес верхнего строения. Для районов с твердыми грунтами, затрудняющими погружение свай, предложена иная конструкция опорного основания, которое удерживается от сдвига под влиянием ветра, волн и течения благодаря собственному весу. Значительные по размерам ячейки фундаментного блока основания создают при их балластировке пригрузки, необходимые для обеспечения устойчивости сооружения, и распределяют вес сооружения по площади, достаточно большой по условиям прочности. Такие конструкции обычно относят к *гравитационным*.

Наиболее распространенным видом гравитационных конструкций является железобетонная конструкция с крупными цилиндрическими фундаментными ячейками, которые окружают несколько несвязанных друг с другом опорных колонн, поддерживающих верхнее строение с оборудованием. Конструкции такого рода установлены в середине 70-х годов в районе Северного моря. Рис. 1.9 отражает характерные особенности этих конструкций. Показанное здесь проектное решение, разработанное и осуществленное в Норвегии, известно под названием Кондип (concrete deepwater, т. е. бетонная, глубоководная).

Способ строительства бетонных сооружений гравитационного типа существенно отличается от описанного выше. Последовательность производства работ, принятая для сооружений в Северном море, показана на рис. 1.10. Фундаментную часть изготовляют в сухом доке, затем ее выводят из дока на плаву и ставят на якорь в глубоководной гавани. Далее возводят в скользящей опалубке опорные колонны. По достижении колоннами проектной высоты опорное основание дополнительно балластируется водой, после чего на него наводят на плаву заранее изготовленный металлический корпус верхнего строения и прикрепляют к верхней части опорных колонн. Затем монтируют остальные модули верхнего строения, сооружение дебалластируют и отбуксировывают к месту эксплуатации, где оно снова принимает балласт и устанавливается в окончательном положении.

На рис. 1.11 показана типичная платформа гравитационного типа в процессе ее буксировки и в эксплуатационном состоянии в районе Северного моря с глубиной воды около 120 м. Фундаментная часть сооружения состоит из 16 бетонных цилиндрических ячеек диаметром 20 м, высотой 50 м и стенками толщиной 0,6 м. Три опорные колонны, возвышающиеся над ячейками фундамента на 100 м, имеют наружный диаметр, изменяющийся кверху от 20 до 12 м. Масса верхнего строения вместе с оборудованием составляет 2250 т, а масса опорного основания – около 270 000 т.

Одним из преимуществ гравитационных сооружений является сокращение времени, необходимого для их постановки на место эксплуатации. Это особенно важно для таких неспокойных районов, как Северное море, где труднопредсказуемые погодные условия заставляют сокращать время, отводимое на постановку сооружения. Другим преимуществом этих сооружений является способность массивных железобетонных колонн нести очень большой вес верхнего строения. Так, вес верхнего строения вместе с оборудованием у гравитационного сооружения,

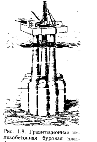


Рис. 1.9. Гравитационная железобетонная буровая платформа, используемая в Северном море.

показанного на рис. 1.11, в 20 раз больше, чем у типичного сооружения со стальным опорным основанием ферменного типа.

Для возведения гравитационных сооружений необходимы глубоководные гавани и фарватеры для транспортировки. Для платформ,

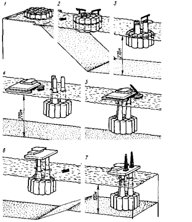


Рис. 1.10. Последовательность операций по возведению и установке гравитационной бетонной буровой платформы.

1 – затопление котлована с возведенной нижней частью ячеистого фундамента опорного основания; *2* – завершение бетонирования 16 ячеек фундамента и начало возведения опорных колонн с применением скользящей опалубки; *3* – частичное погружение сооружения в процессе возведения колонн в глубоководной гавани (глубина ~270 м); *4* – транспортировка корпуса верхнего строения к завершенному опорному основанию; *5* – наведение верхнего строения на притопленное опорное основание, монтаж дополнительных модулей платформы; *6* – буксировка сооружения к месту эксплуатации; *7* – постановка сооружения на дно (глубина около 120 м).

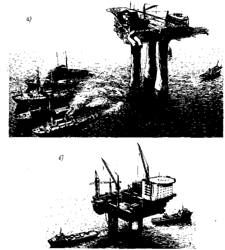


Рис. 1.11. Буровая платформа на гравитационном опорном основании в процессе буксировки (*а*) и на месте эксплуатации в районе Северного моря (*б*).

предназначенных для эксплуатации в Северном море, такие условия имеются в Норвежских фиордах.

Не все гравитационные сооружения должны быть железобетонными или иметь такие гигантские размеры, как показано выше. Стальная гравитационная платформа была, например, установлена на шельфе у Нигерии, где скальные грунты исключали возможность закрепления сооружения от сдвига с помощью свай [44].

Наглядной иллюстрацией применения стальных гравитационных платформ являются установленные в Мексиканском заливе в районе Флориды радионавигационные вышки ВВС США. Они состоят из стальной трубчатой колонны, опертой на заполняемый камнем стальной

Рис. 1.12. Металлическая гравитационная конструкция радионавигационной вышки, установленной в районе Флориды для ВВС США.

короб. Рис. 1.12 показывает одну из таких вышек после постановки на дно, т. е. в эксплуатационном состоянии.

Общая высота сооружения около 60 м, причем наполовину оно находится под водой.

В районе установки этих вышек морское дно представляет собой толстый слой песка, обеспечивающий достаточно устойчивое опирание.

Глубоководные конструкции

При глубине воды более 300 м вес конструкций традиционных морских гидротехнических сооружений достигает большой величины, и для обеспечения их надежного опирания на грунт более целесообразным становится применение специальных конструкций, предназначенных для больших глубин.

На рис. 1.13 показана конструкция в виде *мачты*, состоящей из вертикального ствола постоянного сечения и удерживающих его *оттяжек*, прикрепленных к лежащим на дне гирляндам массивов. От массивов оттяжки идут к анкерам, образуя систему двойного заякорения. При обычных нагрузках на сооружение гирлянды массивов не отрываются от дна и исключают боковые перемещения ствола. Но во время жестокого шторма гирлянды массивов отрываются от дна вследствие натяжения оттяжек усилиями, передающимися от ствола. В результате этого внешние нагрузки на сооружение амортизируются его колебаниями, а оттяжки не перегружаются. Считается, что такие сооружения применимы при глубинах до 600 м.

На рис. 1.14 показана конструкция платформы с вертикальными предварительно натянутыми *анкерными тягами**, закрепленными на морском дне. Корпус платформы обладает значительным запасом плавучести, обеспечивающим предварительное натяжение анкерных тяг, достаточное для сохранения горизонтального положения платформы

*В литературе такие сооружения часто называются платформами типа TLP (tension leg platform).

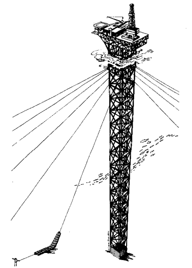


Рис. 1.13. Глубоководная конструкция в виде мачты с оттяжками.

при волнении. Горизонтальные перемещения платформы ограничены восстанавливающим действием дополнительных усилий натяжения, возникающих при этом в анкерных тягах. Основное достоинство таких конструкций в незначительном увеличении их стоимости при возрастании глубины. Ограничения на глубины, при которых эти конструкции могут применяться, связаны в настоящее время с инерционными силами, сопровождающими горизонтальные колебания платформы при волнении. Они становятся существенными при глубинах порядка 900 м [17].

1.3. Расчет стационарных сооружений

Процесс проектирования морских гидротехнических сооружений имеет несколько стадий – от предварительной, основанной на грубых оценках внешних нагрузок, до окончательной, на которой уточняются размеры сооружения, отвечающие нагрузкам, возникающим в процессе их постановки и эксплуатации. Это делается путем детального расчета сооружения. Значения внешних нагрузок, также как и реакция на них со стороны сооружения, зависят от размеров отдельных элементов, поэтому расчет сооружения должен быть поначалу проведен с использованием приближенно оцененных нагрузок. Далее по результатам предварительного расчета уточняются размеры отдельных элементов, и расчет проводится заново. При этом, однако, определяются размеры не каждого в отдельности элемента, а класса элементов по наиболее нагруженному элементу внутри этого класса. Например, в опорных основаниях в виде ферм элементы, соединяющие опорные колонны, обычно имеют одинаковые поперечные сечения, хотя одни нагружены менее других.

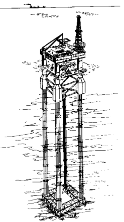


Рис. 1.14. Глубоководная конструкция с вертикальными предварительно натянутыми анкерными тягами.

В расчете в первую очередь принимаются во внимание наиболее неблагоприятные воздействия внешней среды и эксплуатационные нагрузки, возможные в месте расположения сооружения, а также классы элементов, размеры которых зависят от значений этих нагрузок. Затем проектируемое сооружение рассчитывают с учетом нагрузок, возникающих в процессе его постановки на место эксплуатации. Эти нагрузки могут вызвать необходимость увеличения размеров отдельных классов элементов или даже включения в конструкцию дополнительных элементов. Если

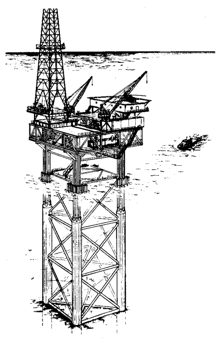
это оказывается необходимым, то должны быть снова уточнены эксплуатационные нагрузки и нагрузки от воздействия окружающей среды, а затем проверена способность элементов нести эти нагрузки. Такая проверка необходима из-за того, что изменение размеров, скажем, у всех элементов, связывающих колонны, приводит к изменению нагрузок как на эти элементы, так и на колонны. Если потребуется дальнейшее изменение размеров элементов, то процедура расчета должна быть проделана еще раз.

Расчеты стальных опорных оснований рамного типа могут быть выполнены на ЭВМ с использованием современных матричных методов, разработанных для стальных каркасных зданий. Усилия, определенные в отдельных элементах, сопоставляются с допускаемыми. Эти методы могут быть применены и для распределения внешних нагрузок по элементам железобетонных сооружений гравитационного типа и, в свою очередь, для расчета нужного армирования.

Для проведения таких расчетов, естественно, необходимо иметь достаточно хорошее представление о нагрузках, действующих на сооружение. В некоторых случаях, таких как подъем или спуск на воду опорных оснований ферменного типа, нагрузки определяются просто – исходя из веса различных элементов конструкции. Столь же просто определяются эксплуатационные нагрузки и нагрузки от собственного веса сооружения на месте его эксплуатации. Однако переход от заданных условий окружающей среды к значениям соответствующих им нагрузок оказывается более сложной задачей. Эти нагрузки должны определяться путем детальных расчетов с использованием соответствующих формул.

Самые простые расчеты стационарных морских гидротехнических сооружений при сочетании эксплуатационных и внешних нагрузок основываются на условии равновесия сооружения под действием максимально возможных нагрузок. Такие статические расчеты обычно достаточны для сооружений, устанавливаемых на глубинах не более 90 м, поскольку они, как правило, обладают достаточно большой жесткостью, что позволяет пренебречь силами инерции, вызванными колебаниями сооружения под действием волновых нагрузок. При расчете сооружений, которые опираются на свайное основание, расположенное в мягких грунтах, необходимо учитывать взаимодействие сооружения и свайного основания. Найденные из расчета вертикальные усилия используются для определения необходимой глубины забивки свай.

Наконец, при расчете сооружений, предназначенных для глубин, бо́льших чем 90 м или имеющих значительную гибкость вследствие каких-либо конструктивных особенностей, следует иметь в виду возможность появления существенных инерционных сил. В этом случае необходимо проверить расчет с учетом возможной перегрузки сооружения вследствие динамического характера нагружения. Это относится и к расчету сооружения при наличии сейсмического воздействия, когда колебания основания под сооружением могут сопровождаться появлением в сооружении значительных инерционных напряжений.



Буровая платформа на четырехопорном основании, предназначенная для глубин ~120 м.

2. МАТРИЧНАЯ ФОРМА РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ

Современные сооружения морского шельфа, подобные описанным в главе 1, обычно состоят из набора элементов, соединенных вместе таким образом, чтобы обеспечить достаточную сопротивляемость конструкции внешним воздействиям и способность нести эксплуатационные нагрузки. Напряженно-деформированное состояние отдельных элементов, образующих конструкцию, хорошо описывается соотношениями механики твердого деформируемого тела. Однако, знания того, как реагирует на внешнее воздействие каждый отдельный элемент, еще недостаточно, чтобы получить представление о реакции сооружения в целом. Для этой цели необходимо прибегать к методам строительной механики.

В 50-х годах, до появления быстродействующих вычислительных машин, методы расчета сложных сооружений обычно были связаны с продолжительными и выполняемыми вручную вычислениями с целью определения реакции сооружения в целом, а также усилий и перемещений в отдельных его элементах. В современных условиях положение иное, и сложные сооружения могут быть быстро рассчитаны с помощью ЭВМ.

Расчеты сооружений на ЭВМ наиболее удобны, когда теория расчета представлена в матричной форме. В данной главе решение получено с использованием *прямого метода жесткости* [22, 47]. Для тех, кто еще незнаком с матричной алгеброй, в приложении приведены краткие, но достаточные сведения на эту тему.

2.1. Матричные соотношения

Начнем обсуждение матричной формы расчета сооружения с рассмотрения упругой реакции на растяжение или сжатие отдельного элемента сооружения *(рис. 2.1). Усилия и перемещения по концам* стержня *1* и *2* имеют положительные направления, указанные на рисунке, и обозначаются соответственно через f_1, f_2 и u_1, u_2. Стержень имеет длину l и поперечное сечение площадью A. Удлинение $\Delta l = u_2 - u_1$, а связанное

Рис. 2.1. Элемент стержневой системы, подверженный осевому нагружению.

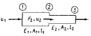


Рис. 2.2. Система в виде соединения двух стержней, подверженных осевому нагружению.

с ним растягивающее усилие $f_2 = EA\,\Delta l/l$ (как известно из механики твердого деформируемого тела), где E – модуль упругости материала (модуль Юнга). Из уравнения равновесия имеем условие $f_1 = -f_2$, и таким образом соотношение между усилиями и перемещениями для этого стержня можно выразить в виде

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -k(u_2 - u_1); \\ f_2 &= k(u_2 - u_1), \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где $k = EA/l$ означает *жесткость* элемента.

Эти уравнения могут быть записаны в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \tag{2.2}$$

или

$$\{f\} = [K]\{u\}, \tag{2.3}$$

где матрицы $\{f\}$, $[K]$ и $\{u\}$ обозначают соответствующие им по порядку следования части уравнения (2.2), причем матрица $[K]$ может быть названа *матрицей жесткости элемента.*

Когда перемещения u_1 и u_2 известны или определены, уравнение (2.2) может быть прямо использовано для нахождения соответствующих усилий f_1 и f_2. Однако, когда определены усилия f_1 и f_2 (при этом, конечно, $f_1 = -f_2$ по условиям равновесия), нетрудно убедиться, что уравнение может быть решено не относительно перемещений u_1 и u_2, а только относительно их разности. Физическое объяснение этого состоит в том, что усилия, приложенные к концам стержня, не фиксируют его абсолютные перемещения, а определяют лишь удлинение стержня, т. е. перемещение одного конца относительно другого. Таким образом, чтобы решить уравнение (2.2) относительно перемещений, необходимо указать, как минимум, одно граничное условие на перемещение, которое бы исключало возможность перемещения стержня как твердого тела. Можно задать либо усилие, либо перемещение. Обратим внимание на то, что нельзя задать на одном и том же конце стержня независимо одно от другого как усилие, так и перемещение, поскольку, если задается перемещение,

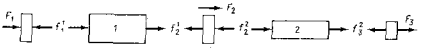


Рис. 2.3. Схема расчленения системы на узлы и элементы.

то усилие должно соответствовать ему и, наоборот, если задается усилие, то можно принять только то смещение, которое ему соответствует.

Если, например, принять условие $u_1 = 0$ вместе с граничным условием на усилие $f_2 = F$, то из уравнения (2.2) следует

$$u_2 = F/k; \quad f_1 = -F. \tag{2.4}$$

Далее рассмотрим более сложный случай – соединение двух стержней (рис. 2.2). В этом случае, как и в предшествующем, необходимо получить уравнения, связывающие усилия и перемещения в указанных сечениях, и решить их при задании соответствующих граничных условий.

Для решения этой задачи сначала построим схему (рис. 2.3), в которой стержни 1 и 2 представлены как элементы, отделенные от узлов. Внутренние усилия (действующие на концы элемента со стороны узлов) здесь обозначены f_1^1, f_2^1 и т. д. Верхний индекс указывает на номер элемента, а нижний – на номер узла, соответствующего нумерации, принятой на рис. 2.2. Например, f_2^1 означает внутреннее усилие, действующее на элемент *1* в узле *2*. Внешние узловые усилия обозначены F_1, F_2, F_3, при этом индекс указывает на номер узла. Эти усилия могут быть приложены непосредственно к узлам или же являться реакциями опорных связей, ограничивающих перемещения узлов.

На основании уравнения (2.2) мы можем написать соотношение между усилиями и перемещениями для отдельных элементов

$$\left.\begin{aligned} f_1^1 &= -k_1(u_2 - u_1); \qquad & f_2^2 &= -k_2(u_3 - u_2); \\ f_2^1 &= k_1(u_2 - u_1); \qquad & f_3^2 &= k_2(u_3 - u_2), \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

где $k_1 = E_1 A_1/l_1$ и $k_2 = E_2 A_2/l_2$.

В дополнение к этому из условий равновесия свободных от закреплений элементов под действием приложенных к ним внешних и внутренних усилий получим

$$F_1 = f_1^1; \quad F_2 = f_2^1 + f_2^2; \quad F_3 = f_3^2. \tag{2.6}$$

Объединяя уравнения (2.5) и (2.6), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= k_1 u_1 - k_1 u_2; \\ F_2 &= -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3; \\ F_3 &= -k_2 u_2 + k_3 u_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Эти уравнения можно представить в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \tag{2.8}$$

или

$$\{F\} = [K]\{u\}, \tag{2.9}$$

где матрицы $\{F\}$, $[K]$ и $\{u\}$ обозначают соответствующие им по порядку следования части уравнения (2.8). Матрица $[K]$ является *матрицей жесткости системы*.

Матрица жесткости системы, как это видно из уравнения (2.8), *симметричная*, т. е. ее первая, вторая и третья строки равны соответственно первому, второму и третьему столбцам. Подобное положение сохраняется и в отношении матрицы жесткости отдельных элементов, что отвечает общему свойству упругих систем, заключающемуся в том, что, например, смещение сечения *2* системы вызывает в сечении *1* усилие, равное тому, которое возникнет в сечении *2* при смещении сечения *1*, таком же, какое было в сечении *2*.

Рассмотрим теперь применение уравнения (2.8) для определения реакции системы. С этой целью необходимо, конечно, установить граничные условия, т. е. задать в каждом сечении усилие *либо* перемещение. Как и в случае расчета элемента, представленного одним стержнем, необходимо задать, по крайней мере, одно граничное условие на перемещения, если мы хотим получить из уравнения (2.8) перемещение любой точки.

Если задать граничные условия в виде $u_1=0$, $F_2=F_2$, $F_3=F_3$, то уравнение (2.8) упростится и получит следующий вид:

$$F_1=-k_1u_2 \tag{2.10}$$

и

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.11}$$

Таким образом, уравнение (2.11) может быть использовано для нахождения перемещений u_2 и u_3 по заданным усилиям F_2 и F_3, а уравнение (2.10) – для определения неизвестного усилия F_1, отвечающего граничному условию.

Уравнения (2.10) и (2.11) удобно выделять из уравнения (2.8) вычеркиванием первого столбца из матрицы жесткости в выражении (2.8), так как каждый элемент этого столбца должен быть умножен на нулевое значение перемещения u_1, а далее полученное можно разделить на два уравнения, из которых первое содержит неизвестную реакцию, а другое – известные усилия. Из последнего уравнения можно найти неизвестные перемещения, а затем из первого определить неизвестную опорную реакцию.

Символически уравнение (2.11) можно записать так:

$$\{F\}=[K]\{u\}, \tag{2.12}$$

где матрицы $\{F\}$, $[K]$ и $\{u\}$ обозначают соответствующие им по порядку следования части уравнения (2.11). Решение этого матричного уравнения относительно перемещений u_2 и u_3 можно представить в виде

$$\{u\}=[K]^{-1}\{F\}, \tag{2.13}$$

где $[K]^{-1}$ является обратной матрицей по отношению к $[K]$, причем в нашем случае

$$[K]^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{k_1} & \dfrac{1}{k_1} \\ \dfrac{1}{k_1} & \dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Подставив это в уравнение (2.13), получим

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{F_2}{k_1}+\frac{F_3}{k_1}; \\ u_3 &= \frac{F_2}{k_1}+\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)F_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

а из уравнения (2.10) найдем, что

$$F_1=-F_2-F_3. \tag{2.16}$$

Внутренние усилия получаются из уравнений (2.5)

$$\left.\begin{aligned} f_2^1 &= -f_1^1=F_2+F_3; \\ f_3^2 &= -f_2^2=F_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Соответствующие им нормальные напряжения σ_1 и σ_2 в элементах *1* и *2* могут быть найдены делением внутренних усилий на площади поперечных сечений элементов A_1 и A_2. Полагая положительными растягивающие напряжения, получаем $\sigma_1=f_2^1/A_1=(F_2+F_3)/A_1$ и $\sigma_2=f_3^2/A_2=F_3/A_2$.

Отметим, что, поскольку для примера принято одно граничное условие, $u_1=0$, то система является *статически определимой*, т. е. опорная реакция F_1 и внутренние усилия $f_1^1, f_2^1, \ldots$ могут быть определены из одних уравнений статики и даже проще, чем с помощью матричных операций. Перемещения могут быть найдены отдельно с помощью матриц жесткости элементов.

Если же мы поставим граничные условия $u_1=u_3=0$ совместно с условиями на усилия $F_2=F$, система станет *статически неопределимой*, и, чтобы найти опорные реакции и внутренние усилия, уравнения статики необходимо сочетать с уравнениями, содержащими жесткостные характеристики элементов, т. е. такими, как в наших матричных выражениях. В этом случае из матричного уравнения (2.8) следует

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{F}{k_1+k_2}; \\ F_1 &= \frac{-k_1}{k_1+k_2}F; \\ F_3 &= \frac{-k_2}{k_1+k_2}F, \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

а из соотношений между усилиями и перемещениями для отдельных элементов

$$
\left.\begin{aligned}
f_1^1 &= -f_2^1 = \frac{-k_1}{k_1+k_2}F; \\
f_2^2 &= -f_3^2 = \frac{k_2}{k_1+k_2}F.
\end{aligned}\right\} \tag{2.19}
$$

Теперь мы видим, что матричная форма расчета не делает различия между статически определимыми и неопределимыми системами и позволяет рассчитывать те и другие единообразно. Явным преимуществом матричной формы расчета является то, что она делает возможным систематическое определение неизвестных перемещений и усилий. Недостатком ее в случае статически неопределимых систем по сравнению с прямым алгебраическим определением оказывается необходимость решения расчлененных матричных уравнений относительно перемещений посредством обращения матрицы. Все большая доступность цифровых вычислительных машин и их использование для обращения матриц уменьшает эти затруднения даже в случаях, когда приходится иметь дело с матрицами жесткости высокого порядка.

Прямой метод жесткости

Матрица жесткости стержневой системы, полученная в выражении (2.8), может быть представлена в виде суммы двух отдельных матриц, т. е.

$$
\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}. \tag{2.20}
$$

Первая матрица в правой части равенства – это матрица жесткости элемента *1*, дополненная нулевыми третьей строкой и третьим столбцом, указывающими на то, что элемент не включает сечение *3* системы. Аналогично, вторая матрица в правой части равенства представляет собой матрицу жесткости элемента *2* с нулевыми первой строкой и первым столбцом, указывающими на то, что элемент не включает сечение *1* стержневой системы. Это положение справедливо для любого числа элементов и подсказывает, таким образом, простой метод формирования матрицы жесткости стержневой системы из матриц жесткости отдельных элементов, а именно прямым сложением этих матриц после дополнения каждой из них нулевыми строками и столбцами, соответствующими по номерам сечениям системы, не относящимся к рассматриваемому

элементу. Этот метод известен в матричной форме расчета сооружений как прямой метод жесткости*.

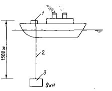


Рис. 2.4. Система лебедка (*1*) –трос (*2*) – якорь (*3*).

На практике построение матрицы жесткости системы может быть достигнуто этим методом без расширения матриц жесткости отдельных элементов нулевыми строками и столбцами. Она может быть сформирована путем установления положения в ней ненулевых коэффициентов матриц жесткости отдельных элементов и последующим их сложением. Основой прямого метода жесткости являются, конечно, условия равновесия, согласно которым внутренние силы в узлах системы должны уравновешиваться внешними силами.

Пример 2.1–1. На рис. 2.4 показана система лебедка–трос–якорь. Якорь имеет вес 9 кН, а трос 10 Н/м. Определим перемещения и внутренние усилия в тросе с помощью описанного выше прямого метода жесткости, полагая для троса $A = 3{,}0$ см^2; $E = 17{,}0$ ГПа.

Перед решением этой задачи отметим, что в предшествующих рассуждениях не рассматривались усилия, действующие между концами стержня, такие, например, как действующий в нашем случае собственный вес троса. Чтобы воспользоваться предложенной выше процедурой, здесь необходимо разделить трос на некоторое число отрезков и считать собственный вес каждого отрезка сосредоточенным по его концам, т. е. нужно полагать, что одна половина веса отрезка приложена к одному концу, другая половина к другому концу. Такой подход, очевидно, приведет к приближенному решению, которое будет тем точнее, чем больше окажется число отрезков (при этом и вычислительные затруднения возрастут). Метод расчета непрерывных систем путем искусственного разделения их на множество элементов известен как *метод конечных элементов*.

Чтобы иметь возможность решить задачу вручную, предположим, что трос разделен на четыре отрезка длиной по 375 м. Пронумеровав узлы, как показано на рис. 2.5, можно сформировать матрицу жесткости системы с помощью прямого метода жесткости

$$
\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix},
$$

где $k = EA/l = 13{,}6$ кН/м. Граничные условия в предположении, что вес

*В переводной литературе употребляется также и другой вариант названия описываемого здесь способа формирования матрицы жесткости – „метод прямой жесткости".

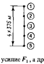


Рис. 2.5. Схема разделения троса на элементы.

каждого отрезка сосредоточен по его концам, выражаются следующим образом: $u_1 = 0$; $F_2 = F_3 = F_4 = 3{,}75$ кН; $F_5 = 10{,}88$ кН. Подставив это в полученное выше матричное уравнение (т. е. вычеркнув первый столбец матрицы жесткости и расчленив систему уравнений на две с меньшим числом неизвестных, причем одна содержит искомое усилие F_1, а другая заданные усилия F_2, F_3 и F_4), найдем, что $F_1 = -ku_2$ и

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} .$$

Используя граничные условия на усилия из последнего матричного уравнения и обратив матрицу коэффициентов вручную либо, что более удобно, с помощью микрокалькулятора, найдем следующие значения перемещений: $u_2 = 1{,}63$ м; $u_3 = 3{,}01$ м; $u_4 = 4{,}05$ м; $u_5 = 4{,}85$ м. Из первого уравнения найдем затем, что $F_1 = -22{,}12$ кН. Помня о том, что эта сила включает в себя опорную реакцию в сечении *1* и половину веса элемента *1–2* (т. е. $F_1 = R + 1{,}88$ кН), найдем далее опорную реакцию, действующую на трос со стороны лебедки, $R = -24$ кН, что вполне согласуется с условиями равновесия, по которому усилие, действующее на лебедку, должно быть равно весу троса и якоря.

Внутренние силы, действующие по концам каждого отрезка, могут быть определены с помощью матриц жесткости отдельных элементов: так, для отрезка *1–2* получим:

$$\begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} .$$

Приняв во внимание, что $u_1 = 0$, получим (рис. 2.6) $f_1^1 = -f_2^1 = -22{,}12$ кН. Аналогично для других отрезков найдем $f_2^2 = -f_3^2 = -18{,}88$ кН; $f_3^3 = -f_4^3 = -14{,}12$ кН; $f_4^4 = -f_5^4 = -10{,}88$ кН.

Напряжения σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4 в этих четырех отрезках определяются делением внутренних усилий на площадь поперечного сечения троса: $\sigma_1 = 73{,}7$; $\sigma_2 = 62{,}9$; $\sigma_3 = 47{,}2$; $\sigma_4 = 36{,}3$ МПа.

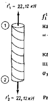


Рис. 2.6. Усилия, действующие на элемент *1–2* троса.

2.2. Плоские фермы

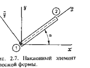


Рис. 2.7. Наклонный элемент плоской фермы.

Плоские системы, элементы которых испытывают только осевое нагружение, относятся к *плоским фермам*. Они состоят из прямолинейных стержней, наклоненных по отношению друг к другу, расположенных в одной плоскости и работающих на растяжение или сжатие. С точки зрения статики, в чем легко убедиться, условиями выполнения последнего требования являются приложение внешних усилий только в точках соединения элементов, отсутствие внешних моментных нагрузок и свобода для относительного поворота стержней в узлах, чтобы предотвратить появление изгибающих моментов в закреплениях.

Чтобы рассчитывать подобные системы, рассмотрим сначала случай осевого нагружения стержня, повернутого на угол α по отношению к горизонтали (рис. 2.7). Выберем горизонтальную и вертикальную оси координат x и y, а также повернутые относительно них оси $\bar{x}$ и $\bar{y}$, как показано на рисунке. Первую систему осей будем считать *общей* для системы элементов, а вторую – *местной*, присущей только данному элементу.

Обозначим f_{1x}, f_{1y} и f_{2x}, f_{2y} составляющие усилий в направлении осей x и y, действующие в сечениях *1* и *2* стержня, соответственно и $\bar{f}_{1x}$, $\bar{f}_{1y}$ и $\bar{f}_{2x}$, $\bar{f}_{2y}$ составляющие усилий в тех же сечениях, направленные по осям $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Из геометрии нетрудно установить выражения для преобразования составляющих усилий в сечении *1* из одной системы осей в другую:

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}_{1x} &= f_{1x}\cos\alpha + f_{1y}\sin\alpha; \\ \bar{f}_{1y} &= -f_{1x}\sin\alpha + f_{1y}\cos\alpha; \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{1x} &= \bar{f}_{1x}\cos\alpha - \bar{f}_{1y}\sin\alpha; \\ f_{1y} &= \bar{f}_{1x}\sin\alpha + \bar{f}_{1y}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Аналогичные выражения получаются и для усилий в сечении *2*.

В матричной записи эти выражения получают вид

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} ; \tag{2.23}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{1x} \\ \bar{f}_{1y} \\ \bar{f}_{2x} \\ \bar{f}_{2y} \end{Bmatrix} . \tag{2.24}$$

Отметим, что вторая из двух квадратных матриц есть не что иное, как первая матрица, у которой строки и столбцы переменены местами.

Это значит, что вторая матрица является *транспонированной* по отношению к первой. Таким образом, если $[C]$ обозначает первую матрицу, то $[C]^{T}$ может быть использовано для обозначения второй. Отсюда

$$\left\{\bar{f}\right\}=[C]\left\{f\right\}\;;\;\left\{f\right\}=[C]^{T}\left\{\bar{f}\right\}. \tag{2.25}$$

Приведенные выше рассуждения касаются составляющих усилий в сечениях 1 и 2 элемента. Однако, очевидно, что подобные выводы применимы и по отношению к составляющим перемещений в направлении осей x и y, т. е. u_1, v_1 и u_2, v_2 в сечениях 1 и 2, и к составляющим перемещений в направлении осей $\bar{x}$ и $\bar{y}$, т. е. $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ и $\bar{u}_2$, $\bar{v}_2$. Это можно записать так:

$$\left\{\bar{u}\right\}=[C]\left\{u\right\}\;;\;\left\{u\right\}=[C]^{T}\left\{\bar{u}\right\}, \tag{2.26}$$

где матрицы перемещений имеют вид

$$\left\{\bar{u}\right\}=\begin{Bmatrix}\bar{u}_1\\ \bar{v}_1\\ \bar{u}_2\\ \bar{v}_2\end{Bmatrix}\;;\;\left\{u\right\}=\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим элемент 1–2, подверженный, как и ранее, одноосному нагружению. Очевидно,

$$\bar{f}_{1y}=\bar{f}_{2y}=0, \tag{2.27}$$

и, как уже было показано,

$$\left\{\bar{f}\right\}=\left[\bar{K}\right]\left\{\bar{u}\right\}, \tag{2.28}$$

где $\left[\bar{K}\right]$ обозначает матрицу жесткости элемента в местной для элемента системе осей.

Используя выражения (2.25) и (2.26), последнее соотношение запишем

$$[C]\left\{f\right\}=\left[\bar{K}\right][C]\left\{u\right\}. \tag{2.29}$$

Умножая обе части равенства слева на матрицу $[C]^{T}$ и замечая, что

$$[C]^{T}[C]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[I], \tag{2.30}$$

получаем

$$\left\{f\right\}=[C]^{T}\left[\bar{K}\right][C]\left\{u\right\}. \tag{2.31}$$

Сопоставив это выражение с $\left\{f\right\}=[K]\left\{u\right\}$, найдем, что матрица жесткости элемента в общей системе осей получается как

$$[K]=[C]^{T}\left[\bar{K}\right][C]. \tag{2.32}$$

Последнее выражение отражает преобразование матрицы жесткости элемента из местной в общую систему осей координат. Поскольку матрица $\left[\bar{K}\right]$ может быть получена с помощью выражения (2.2) в очень простом виде

$$\left[\bar{K}\right]=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{2.33}$$

(здесь добавлены нулевые вторые и четвертые строки и столбцы для указания отсутствия связи между составляющими усилий и перемещений в направлении оси $\bar{y}$), выражению (2.32) для матрицы жесткости $[K]$ можно придать вполне законченный вид

$$[K]=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}\lambda^2&\lambda\mu&-\lambda^2&-\lambda\mu\\ \lambda\mu&\mu^2&-\lambda\mu&-\mu^2\\ -\lambda^2&-\lambda\mu&\lambda^2&\lambda\mu\\ -\lambda\mu&-\mu^2&\lambda\mu&\mu^2\end{bmatrix}, \tag{2.34}$$

где $\lambda=\cos\alpha$; $\mu=\sin\alpha$.

Полученное выражение характеризует матрицу жесткости элемента, повернутого относительно системы осей координат. Полезность этого выражения становится очевидной, когда рассматривается система элементов, не вытянутых в одну линию. В этом случае матрица жесткости каждого элемента может быть получена в общей системе осей, а матрица жесткости системы элементов – из матриц жесткости отдельных элементов с помощью рассмотренного ранее прямого метода жесткости. После задания соответствующих граничных условий, включающих составляющие усилий *или* перемещений в каждом узле (обычно их лучше задавать в общей системе осей), с помощью соотношения между узловыми усилиями и перемещениями можно определить оставшиеся неизвестными составляющие усилий и перемещений. Как и в случае рассмотрения соосных систем, необходимо задать достаточное число составляющих перемещений, чтобы получить единственное решение для оставшихся неизвестных, т. е. предотвратить возможность перемещения системы элементов как твердого целого.

После определения перемещений узлов можно вычислить внутренние усилия, действующие по концам каждого элемента. Для рассматриваемого элемента, в частности, с помощью выражения (2.34) можно получить соотношение между усилиями и перемещениями в общей системе осей координат

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \qquad (2.35)$$

Например, составляющие f_{2x} и f_{2y} могут быть найдены на основании полученного соотношения как

$$\left.\begin{aligned} f_{2x} &= \frac{EA}{l} \, [\lambda^2 (u_2 - u_1) + \lambda\mu (v_2 - v_1)]; \\ f_{2y} &= \frac{EA}{l} \, [\lambda\mu (u_2 - u_1) + \mu^2 (v_2 - v_1)]. \end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

Из уравнения (2.23) получим также продольную силу в элементе

$$N_{1-2} = \overline{f}_{2x} = \lambda f_{2x} + \mu f_{2y}, \qquad (2.37)$$

так что с помощью выражений (2.36) и равенства $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ найдем

$$N_{1-2} = \frac{EA}{l} \, [\lambda (u_2 - u_1) + \mu (v_2 - v_1)], \qquad (2.38)$$

где продольная сила в элементе *1–2* выражена через перемещения в общей системе осей координат. Обобщая, можно написать выражение для продольной силы в любом элементе *i–j*:

$$N_{i-j} = \frac{EA}{l} \, [\lambda (u_j - u_i) + \mu (v_j - v_i)]. \qquad (2.39)$$

Отметим, что, если N_{i-j} положительно, элемент будет растянут; если отрицательно, элемент сжат. Соответствующие растягивающие или сжимающие нормальные напряжения получаются делением N_{i-j} на площадь поперечного сечения A элемента.

Условные обозначения

Условные обозначения, принятые для вывода выражения (2.34) при рассмотрении стержневого элемента на рис. 2.7, распространим и на последующие формулы. Пусть α обозначает угол между горизонтальной осью x общей системы и осью $\overline{x}$ местной системы, причем положительное направление оси $\overline{x}$ совпадает с направлением от узла i

к узлу j стержневого элемента $i–j$. Тогда из выражения (2.34) можно получить матрицу жесткости $[K]_{i-j}$ элемента, такую, что

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{Bmatrix} = [K]_{i-j} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}. \qquad (2.40)$$

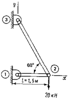


Рис. 2.8. Схема нагружения фермы.

Пример 2.2–1. Рассмотрим простейшую систему, показанную на рис. 2.8. Оба элемента-стержня выполнены из алюминиевой трубы с внешним диаметром 76 мм и толщиной стенки 3 мм. Приняв $E = 70$ ГПа, определим напряжения и перемещения, вызванные приложением груза 20 кН.

Чтобы построить матрицы жесткости каждого элемента в системе осей x, y, сначала составим табл. 2.1. Далее с помощью выражения (2.34) легко получим следующие матрицы жесткости элементов:

$$[K]_{1-2} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[K]_{2-3} = \frac{EA}{2l}, \begin{bmatrix} 0{,}250 & -0{,}433 & -0{,}250 & 0{,}433 \\ -0{,}433 & 0{,}750 & 0{,}433 & -0{,}750 \\ -0{,}250 & 0{,}433 & 0{,}250 & -0{,}433 \\ 0{,}433 & -0{,}750 & -0{,}433 & 0{,}750 \end{bmatrix}.$$

Характеристика „усилие-перемещение" элемента *1–2* не зависит от усилий или перемещений в узле *3*, следовательно, чтобы показать эту независимость, матрица жесткости $[K]_{1-2}$ может быть расширена дополнением нулевых пятых и шестых строк и столбцов. Аналогичная характеристика элемента *2–3* не зависит от усилий или перемещений в узле *1*, и матрица жесткости может быть расширена дополнением нулевых первых и вторых строк и столбцов. Складывая эти (расширенные) матрицы жесткости и принимая во внимание скалярные множители

Таблица 2.1. **Значения тригонометрических функций в выражении (2.34)**

Элемент	α	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda\mu$
1–2	0	1	0	1	0	0
2–3	120°	−0,500	0,866	0,250	0,750	−0,433

EA/l и $EA/(2l)$, легко получим выражение матрицы жесткости системы элементов прямым методом жесткости

$$[K]=\frac{EA}{2l}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2{,}250 & -0{,}433 & -0{,}250 & 0{,}433 \\ 0 & 0 & -0{,}433 & 0{,}750 & 0{,}433 & -0{,}750 \\ 0 & 0 & -0{,}250 & 0{,}433 & 0{,}250 & -0{,}433 \\ 0 & 0 & 0{,}433 & -0{,}750 & -0{,}433 & 0{,}750 \end{bmatrix}$$

Эта матрица является характеристикой системы в выражении $\{F\} = [K]\ \{u\}$, где матрицы узловых внешних сил $\{F\}$ и узловых перемещений системы элементов $\{u\}$ имеют вид

$$\{F\}=\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix}; \quad \{u\}=\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Чтобы решить это матричное уравнение относительно перемещений, необходимо задать граничные условия, как и во всех предыдущих случаях. В данной задаче (см. рис. 2.8) они записываются так: $u_1 = v_1 = 0$, $u_3 = v_3 = 0$, $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = -20$ кН. В результате из общей системы уравнений, связывающей узловые усилия системы элементов с перемещениями, можно выделить систему уравнений меньшего порядка

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2l}\begin{bmatrix} 2{,}250 & -4{,}333 \\ -0{,}433 & 0{,}750 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}.$$

Решая эту систему при заданных значениях F_{2x} и F_{2y}, можно определить перемещения u_2 и v_2, а затем получить усилия F_{1x}, F_{1y} и F_{3x}, F_{3y} из остальной части матричного уравнения, связывающего усилия и перемещения,

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2l}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0{,}250 & 0{,}433 \\ 0{,}433 & -0{,}750 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}.$$

При $E = 70$ ГПа, $A = 6{,}85$ см^2 и $l = 1{,}5$ м найдем $u_2 = -0{,}361 \cdot 10^{-3}$ м $= -0{,}36$ мм; $v_2 = -1{,}88 \cdot 10^{-3}$ м $= -1{,}88$ мм и $F_{1x} = 11{,}55$ кН; $F_{1y} = 0$; $F_{3x} = -11{,}55$ кН; $F_{3y} = 20$ кН.

Зная перемещения, можно определить внутренние усилия в элементах по выражению (2.39) $N_{1-2} = -11{,}55$ кН; $N_{2-3} = 23{,}1$ кН. Эти усилия показаны на рис. 2.9. Делением внутренних усилий на площадь поперечного сечения найдем окончательно нормальные напряжения в соответствующих элементах: $\sigma_{1-2} = -16{,}85$ МПа; $\sigma_{2-3} = 33{,}70$ МПа.

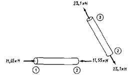


Рис. 2.9. Усилия, действующие на отдельные элементы фермы.

Пример 2.2–2. Покажем, что уравнения равновесия для узла *2* системы элементов, рассмотренной в предыдущем примере, и матричное соотношение между усилиями и перемещениями приведут к тем же двум уравнениям для определения неизвестных узловых перемещений, что были получены прямым методом жесткости.

На рис. 2.10 показана расчлененная по узлам система элементов и узел *2*. Применим уравнения равновесия $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$ к узлу *2*

$$F_{2x} = f^1_{2x} + f^2_{2x}; \quad F_{2y} = f^1_{2y} + f^2_{2y},$$

где верхние индексы *1* и *2* указывают соответственно на стержни *1–2* и *2–3*. Из матричных соотношений между усилиями и перемещениями

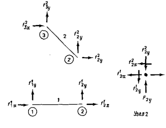


Рис. 2.10. Схема расчленения фермы на элементы и узел.

для отдельных элементов найдем при $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$:

$$f_{2x}^1 = 0; \quad f_{2y}^1 = \frac{EA}{l} u_2;$$

$$f_{2x}^2 = \frac{EA}{2l} (0{,}250u_2 - 0{,}433v_2);$$

$$f_{2y}^2 = \frac{EA}{2l} (-0{,}433u_2 + 0{,}750v_2).$$

Объединив эти результаты с полученными выше уравнениями равновесия, найдем в матричной записи

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 2{,}250 & -0{,}433 \\ -0{,}433 & 0{,}750 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix},$$

что полностью совпадает с уравнениями, полученными в предыдущем примере прямым методом жесткости. Применяя эту процедуру к узлам *1* и *3*, можно получить уравнения относительно неизвестных узловых усилий.

Пример 2.2–3. Верхнее строение буровой установки вместе с оборудованием весит 1,65 МН. Оно поддерживается четырьмя колоннами по углам и ферменными конструкциями по двум сторонам, как показано на рис. 2.11. Стержни фермы выполнены из стали (E = 210 ГПа) и имеют поперечные сечения площадью 9,6 см^2. Можно предположить, что на каждую опорную точку (а их по пять на обеих сторонах установки) приходится по 1/10 доли нагрузки, т. е. по 0,165 МН. При этом условии определим перемещения, реакции и внутренние усилия в стержнях фермы *1–2–3–4*, полагая нулевыми перемещения узлов *1* и *3*.

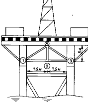


Рис. 2.11. Схема ферменной конструкции, поддерживающей верхнее строение буровой установки.

Будем решать эту задачу так же, как и в предыдущем, но сначала получим соотношение между усилиями и перемещениями для системы элементов с помощью прямого метода жесткости.

Выбрав общую систему осей так, что ось x горизонтальна и имеет положительное направление вправо, а ось y вертикальна и имеет положительное направление вверх, получим

$$[K] = \frac{EA}{l_1} \begin{bmatrix} 1{,}476 & 0{,}381 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}476 & -0{,}381 \\ 0{,}381 & 0{,}305 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}381 & -0{,}305 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}250 & 0 & 0 & 0 & -1{,}250 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1{,}476 & -0{,}381 & -0{,}476 & 0{,}381 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}381 & -0{,}305 & 0{,}381 & -0{,}305 \\ -0{,}487 & -0{,}381 & 0 & 0 & -0{,}476 & 0{,}381 & 0{,}952 & 0 \\ -0{,}381 & -0{,}305 & 0 & -1{,}250 & 0{,}381 & -0{,}305 & 0 & 1{,}860 \end{bmatrix},$$

где l_1 = 7,5 м. Эта матрица связывает усилие и перемещения в узлах в уравнении $F = [K]\ u$, где

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{4y} \end{Bmatrix}; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_4 \end{Bmatrix}.$$

Граничные условия имеют здесь следующий вид: $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$; $F_{2x} = F_{2y} = F_{4x} = 0$; $F_{4y} = -0{,}165$ МН.

С учетом этого можно расчленить общее матричное уравнение на два меньшего порядка

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0{,}476 & -0{,}381 \\ 0 & 0 & -0{,}381 & -0{,}305 \\ -1 & 0 & -0{,}476 & 0{,}381 \\ 0 & 0 & 0{,}381 & -0{,}305 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

и

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}250 & 0 & -1{,}250 \\ 0 & 0 & 0{,}952 & 0 \\ 0 & -1{,}250 & 0 & 1{,}860 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}.$$

Решая последнее матричное уравнение при заданных значениях узловых усилий, находим $u_2 = u_4 = 0$; $v_2 = v_4 = -0{,}0101$ м.

Затем из первого матричного уравнения находим реакции в узлах *1* и *3*: $F_{1x} = -F_{3x} = 0{,}1033$ МН; $F_{1y} = F_{3y} = 0{,}0829$ МН.

И, наконец, по выражению (2.39) определяем внутренние усилия (продольные силы) в элементах $N_{1-2} = N_{2-3} = N_{2-4} = 0$; $N_{1-4} = N_{3-4} = -0{,}1325$ МН.

Нормальное напряжение σ_{i-j} в элементе $i–j$ получается делением соответствующей продольной силы на площадь поперечного сечения элемента. В результате имеем $\sigma_{1-2} = \sigma_{2-3} = \sigma_{2-4} = 0$; $\sigma_{1-4} = \sigma_{3-4} = -138$ МПа.

Рис. 2.12. Наклонный элемент пространственной фермы.

2.3. Пространственные фермы

Предыдущее изложение было ограничено двухмерными, не вытянутыми в одну линию элементами стержневых систем, подверженных растягивающим или сжимающим нагрузкам, и дало возможность рассматривать задачи о плоских фермах. Для возможности перехода к трехмерным задачам о пространственных фермах рассмотрим элемент на рис. 2.12.

Оси местной системы координат обозначим $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, а оси общей для всех элементов системы x, y, z. Примем, кроме того, следующие обозначения углов между осями обеих систем:

$\alpha_{x\bar{x}}$ – угол между осями $x, \bar{x}$;
$\alpha_{y\bar{x}}$ – угол между осями $y, \bar{x}$;
. . . .
$\alpha_{z\bar{z}}$ – угол между осями $z, \bar{z}$.

Нетрудно убедиться, что связь между составляющими усилий в сечениях *1* и *2* элемента в общей и местной системах осей координат может быть записана в матричной форме по аналогии с формулами, полученными для двухмерных элементов,

$$\left\{\bar{f}\right\} = [C]\left\{f\right\}; \quad \left\{f\right\} = [C]^{\mathrm{T}}\left\{\bar{f}\right\}, \tag{2.41}$$

где

$$\left\{\bar{f}\right\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{1x} \\ \bar{f}_{1y} \\ \bar{f}_{1z} \\ \bar{f}_{2x} \\ \bar{f}_{2y} \\ \bar{f}_{2z} \end{Bmatrix}; \quad \left\{f\right\} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \end{Bmatrix}, \tag{2.42}$$

а матрица преобразования составляющих усилий имеет вид

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{bmatrix}, \tag{2.43}$$

причем

$\lambda_1 = \cos\alpha_{x\bar{x}}$;
$\mu_1 = \cos\alpha_{y\bar{x}}$;
$\nu_1 = \cos\alpha_{z\bar{x}}$;
. . . .
$\nu_3 = \cos\alpha_{z\bar{z}}$.

Аналогичные выражения можно получить для составляющих перемещений

$$\left\{\bar{u}\right\} = [C]\left\{u\right\}; \quad \left\{u\right\} = [C]^{\mathrm{T}}\left\{\bar{u}\right\}, \tag{2.44}$$

где

$$\left\{\bar{u}\right\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix}; \quad \left\{u\right\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.45}$$

Как и ранее, в случае рассмотрения двухмерных элементов, соотношение между узловыми усилиями и перемещениями можно представить в виде

$$\left\{\bar{f}\right\} = [\bar{K}]\left\{\bar{u}\right\}. \tag{2.46}$$

Использовав выражения (2.41) и (2.44), представим последнее в виде

$$[C]\left\{f\right\} = [\bar{K}][C]\left\{u\right\}. \tag{2.47}$$

Умножая обе части этого равенства на матрицу $[C]^{\mathrm{T}}$ слева и учитывая, что

$$[C]^{\mathrm{T}}[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I], \tag{2.48}$$

получаем

$$\left\{f\right\} = [C]^{\mathrm{T}}[\bar{K}][C]\left\{u\right\}. \tag{2.49}$$

Сравнивая это выражение с уравнением $\left\{f\right\} = [K]\left\{u\right\}$, будем иметь выражения для матрицы жесткости элемента в общей системе осей координат

$$[K] = [C]^{\mathrm{T}}[\bar{K}][C]. \tag{2.50}$$

Приняв матрицу $[\overline{K}]$ в виде

$$[\overline{K}] = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.51)$$

и использовав выражения (2.43) и (2.50), получим

$$[K] = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \lambda^2 & & \text{Симметрично} & & & \\ \lambda\mu & \mu^2 & & & & \\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & & & \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu & \lambda^2 & & \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \lambda\mu & \mu^2 & \\ -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \end{bmatrix}, \qquad (2.52)$$

где $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$ и $\nu = \nu_1$.

При расчете пространственных ферм с помощью этого выражения следует поступать точно так же, как и в случае рассмотрения двухмерных задач, и дополнять матрицу жесткости каждого отдельного элемента в общей системе осей координат нулевыми строками и столбцами, соответствующими узлам системы, не входящим в состав элемента. Затем, используя прямой метод жесткости, эти матрицы складываем, задаем граничные условия и вычисляем неизвестные перемещения и реакции опорных связей. Внутренние усилия (продольные силы) могут быть определены окончательно с помощью формулы

$$N_{i-j} = \overline{f}_{jx} = \lambda f_{2x} + \mu f_{2y} + \nu f_{2z}, \qquad (2.53)$$

где усилия f_{2x}, f_{2y} и f_{2z} находим по формуле (2.49), применяемой к элементу i–j. Соответствующие растягивающие или сжимающие нормальные напряжения вычисляем далее делением усилия N_{i-j} на площадь поперечного сечения элемента, как и в случае рассмотрения плоских ферм.

2.4. Плоские рамы

В параграфе 2.3 рассматривались элементы, подверженные только осевому нагружению. В элементах некоторых определенного вида систем, называемых *рамами*, возникают также поперечные силы и изгибающие моменты. Для расчета подобных систем необходимо, таким образом, развить основные матричные соотношения, полученные для ферм, включив в них дополнительные внутренние усилия.

В противоположность фермам, в которых элементы полагаются свободно поворачивающимися в узловых соединениях, рамы обычно

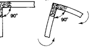


Рис. 2.13. Жесткий узел: *а* – до нагружения; *б* – после нагружения.

Рис. 2.14. Элемент стержневой системы, подверженный осевому нагружению и изгибу.

считаются имеющими *жесткие узлы*, т. е. сохраняющими после нагружения углы между соединенными в них элементами. Пример такого узла показан на рис. 2.13. Прямой угол, под которым в этом узле соединены элементы, не изменяется после нагружения даже при повороте узла. Все соединяемые жестким узлом элементы будут, следовательно, испытывать такой же узловой поворот, как и сам узел.

В данном параграфе рассматриваются матричные соотношения для расчета *плоских рам*, т. е. таких рам, элементы которых лежат в одной и той же плоскости. Узлы, соединяющие элементы, полагаются жесткими в указанном выше смысле.

Матрица жесткости элемента

Рассмотрим элемент 1–2 на рис. 2.14 под воздействием вертикального усилия f_{1y} и момента m_1, приложенных к концу 1, а также f_{2y} и m_2 на конце 2. Вертикальные усилия считаются положительными, если они направлены в сторону положительных y, а положительные моменты действуют по ходу часовой стрелки. Ограничиваясь случаем, когда поперечное сечение элемента симметрично относительно вертикальной оси, проведенной через центр тяжести сечения, уравнение изгиба элемента можно записать в виде

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x), \qquad (2.54)$$

где E – модуль Юнга; I – момент инерции поперечного сечения элемента; v – прогиб в сечении x; $M(x)$ – изгибающий момент, принимаемый положительным, если на отсеченный правый конец элемента он действует против хода часовой стрелки, как показано на рис. 2.15. Из условий равновесия

$$M = m_1 + xf_{1y}. \qquad (2.55)$$

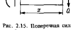


Рис. 2.15. Поперечная сила и изгибающий момент в сечении элемента.

Объединяя последние два уравнения

и интегрируя, находим (при постоянном EI), что

$$EI\,(dv/dx) = m_1 x + f_{1y}\,(x^2/2) - EI\theta_1 \tag{2.56}$$

и

$$EIv = m_1(x^2/2) + f_{1y}\,(x^3/6) - EI\theta_1 x + EIv_1, \tag{2.57}$$

где граничные условия

$$v = v_1; \quad dv/dx = -\theta_1 \tag{2.58}$$

определены при $x = 0$, т. е. в сечении *1*. Отметим, что угол поворота сечения θ_1 положителен при тех же условиях, что и M_1.

Полагая

$$v = v_2; \quad dv/dx = -\theta_2 \tag{2.59}$$

для сечения *2* (при $x = l$), получаем из уравнений (2.56)–(2.57), что

$$\left.\begin{aligned} EI\theta_2 &= -m_1 l - f_{1y}\,(l^2/2) + EI\theta_1; \\ EIv_2 &= m_1(l^2/2) + f_{1y}\,(l^3/6) - EI\theta_1 l + EIv_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

Эти уравнения могут быть решены относительно M_1 и f_{1y}:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{6EI}{l^2}\,(v_2 - v_1) + \frac{2EI}{l}\,(2\theta_1 + \theta_2); \\ f_{1y} &= -\frac{12EI}{l^3}\,(v_2 - v_1) - \frac{6EI}{l^2}\,(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Кроме того, из условий равновесия элемента в целом (см. рис. 2.14) следует

$$m_2 = -m_1 - lf_{1y}; \quad f_{2y} = -f_{1y}, \tag{2.62}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= \frac{6EI}{l^2}\,(v_2 - v_1) + \frac{2EI}{l}\,(\theta_1 + 2\theta_2); \\ f_{2y} &= \frac{12EI}{l^3}\,(v_2 - v_1) + \frac{6EI}{l^2}\,(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

Соотношение между усилиями и перемещениями может быть записано на основании полученных формул в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^4} \begin{bmatrix} 12l & -6l^2 & -12l & -6l^2 \\ -6l^2 & 4l^3 & 6l^2 & 2l^3 \\ -12l & 6l^2 & 12l & 6l^2 \\ -6l^2 & 2l^3 & 6l^2 & 4l^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \tag{2.64}$$

В дополнение к поперечным силам и моментам, действующим по концам элемента, включим в рассмотрение и продольные силы. Из параграфа 2.1 известно соотношение между этими силами и перемещениями, которое можно включить в выражение (2.64),

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \text{Симметрично} & & & \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \tag{2.65}$$

Произвольно ориентированный на плоскости элемент

Как и в случае осевого нагружения элемента, можно рассмотреть матрицу жесткости элемента, наклонного по отношению к осям общей системы. Используем $\bar{x}$ и $\bar{y}$ для обозначения местных осей и x, y для осей общей системы (рис. 2.16). Формулы преобразования составляющих усилий или перемещений из одной системы осей в другую устанавливаем на основании предшествующего рассмотрения нагруженных в осевом направлении элементов. Поскольку моменты m_1 и m_2 могут быть представлены как векторы, нормальные к плоскости $x0y$, очевидно, что они, как и соответствующие им углы θ_1

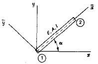


Рис. 2.16. Наклонный элемент плоской системы рамного типа.

и θ_2, не подвергаются преобразованию. Таким образом, формулы для *преобразования составляющих усилий элемента из общей в местную* систему осей и наоборот могут быть записаны так:

$$\left\{\bar{f}\right\} = [C]\left\{f\right\}\ ; \quad \left\{f\right\} = [C]^{T}\left\{\bar{f}\right\}, \tag{2.66}$$

где

$$\left\{\bar{f}\right\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{1x} \\ \bar{f}_{1y} \\ \bar{m}_1 \\ \bar{f}_{2x} \\ \bar{f}_{2y} \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} ; \quad \left\{f\right\} = \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix},$$

а матрица преобразования с учетом полученных ранее результатов

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.67}$$

причем $\lambda = \cos\alpha$; $\mu = \sin\alpha$.

Аналогичные выражения можно получить для составляющих перемещений:

$$\left\{\bar{u}\right\} = [C]\left\{u\right\}\ ; \quad \left\{u\right\} = [C]^{T}\left\{\bar{u}\right\}, \tag{2.68}$$

где

$$\left\{\bar{u}\right\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} ; \quad \left\{u\right\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

Используя полученное выше соотношение между усилиями и *перемещениями*

$$\left\{\bar{f}\right\} = \left[\bar{K}\right]\left\{\bar{u}\right\}, \tag{2.69}$$

можно легко прийти к выражению

$$[K] = [C]^{T}\left[\bar{K}\right][C] \tag{2.70}$$

для *матрицы жесткости элемента в общей системе осей. Матрица* $\left[\bar{K}\right]$ с учетом (2.65) получает следующий вид:

$$[K] = \frac{E}{l}\begin{bmatrix} A\lambda^2 + \frac{12I}{l^2}\mu^2 & & & & & \\ \left(A - \frac{12I}{l^2}\right)\lambda\mu & A\mu^2 + \frac{12I}{l^2}\lambda^2 & & \text{Симметрично} & & \\ \frac{6I}{l}\mu & -\frac{6I}{l}\lambda & 4I & & & \\ -\left(A\lambda^2 + \frac{12I}{l^2}\mu^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{l^2}\right)\lambda\mu & -\frac{6I}{l}\mu & A\lambda^2 + \frac{12I}{l^2}\mu^2 & & \\ -\left(A - \frac{12I}{l^2}\right)\lambda\mu & -\left(A\mu^2 + \frac{12I}{l^2}\lambda^2\right) & \frac{6I}{l}\lambda & \left(A - \frac{12I}{l^2}\right)\lambda\mu & A\mu^2 + \frac{12I}{l^2}\lambda^2 & \\ \frac{6I}{l}\mu & -\frac{6I}{l}\lambda & 2I & -\frac{6I}{l}\mu & \frac{6I}{l}\lambda & 4I \end{bmatrix}. \tag{2.71}$$

Выражение (2.71) позволяет получать матрицу жесткости элемента, наклонного по отношению к осям общей системы координат. Оно может быть использовано точно так же, как полученное ранее выражение для наклонного элемента, подверженного только осевому нагружению. Например, если рассчитывается рама, состоящая из нескольких наклонных элементов, то сначала надо преобразовать матрицы жесткости каждого элемента к общей системе осей координат, а затем сложить их с помощью прямого метода жесткости (который обеспечивает равновесие в узлах внутренних и внешних усилий) для получения матрицы жесткости системы элементов. После задания граничных условий определяются искомые перемещения от заданных сил (для этого используется одна часть расчлененной системы уравнений, связывающей усилия с *перемещениями), а затем по найденным перемещениям определяются* неизвестные реакции опорных связей (с помощью другой части расчлененной системы уравнений).

Следует указать, что правило знаков для заданных узловых усилий F_x, F_y и M такое же, как и для внутренних усилий по концам элемента (*см. рис. 2.14), т. е. положительные силы совпадают по направлению* с осями координат, а положительный момент действует по ходу часовой стрелки. Аналогично, узловые перемещения u, v совпадают по направлению с осями координат, а поворот θ положительный, если направлен по ходу часовой стрелки.

Граничные условия должны задаваться в задачах о рамах так же, как и в случае ферм. В каждом узле должны быть заданы три условия: на F_x или u, F_y или v, M или θ. При этом должно было задано достаточное число составляющих перемещений, что дало бы возможность устранить перемещение системы как твердого целого. В противном случае при вычислении неизвестных узловых перемещений не будет существовать единственное решение.

Найденные перемещения узлов могут быть тут же использованы для определения внутренних усилий на концах элементов с помощью матриц жесткости отдельных элементов (отнесенных к общей системы осей). По этим усилиям далее подсчитываются напряжения в отдельных элементах, для чего могут быть использованы формулы механики твердого деформируемого тела.

Напряжение в любой точке B, находящейся в сечении с координатой $\bar{x}$ элемента, включает нормальную σ и касательную τ составляющие, как показано на рис. 2.17. В свою очередь, нормальное напряжение σ состоит из двух слагаемых: σ_N от продольной силы и σ_M от изгибающего момента, т. е.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M, \qquad (2.72)$$

которые вычисляются по формулам

$$\sigma_N = N/A; \quad \sigma_M = -M\bar{y}/I, \qquad (2.73)$$

где A и I обозначают, как и ранее в матрицах жесткости, площадь и момент инерции поперечного сечения элемента, а $\bar{y}$ – расстояние

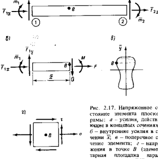


Рис. 2.17. Напряженное состояние элемента плоской рамы: *а* – усилия, действующие в концевых сечениях; *б* – внутренние усилия в сечении $\bar{x}$; *в* – поперечное сечение элемента; *г* – напряжения в точке B (элементарная площадка параллельна плоскости $\bar{x}O\bar{y}$).

по вертикали от точки B до центра тяжести сечения. Касательное напряжение выражается через поперечную силу Q:

$$\tau = QS/Ib, \qquad (2.74)$$

где S – статический момент части площади поперечного сечения, расположенной по одну сторону от линии, проведенной параллельно нейтральной оси на расстоянии $\bar{y}$; b – ширина поперечного сечения на расстоянии $\bar{y}$ от нейтральной оси.

Характеристики поперечного сечения, входящие в последние две формулы, вычисляются следующим образом:

$$I = \int_A \bar{y}^2\, dA; \quad S = \int_{A_s} \bar{y}\, dA.$$

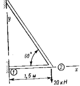


Рис. 2.18. Плоская рама с защемленными концами *1*, *3* и жестким узлом *2*.

Пример 2.4–1. Рама на рис. 2.18 составлена из двух жестко соединенных в узле *2* алюминиевых (E=70 ГПа) труб, имеющих внешний диаметр 76 мм и толщину стенки 3 мм. Требуется определить перемещения узла *2* и максимальные значения напряжений в элементах.

Отметим, что эта рама напоминает ферму, рассмотренную в примере 2.2–1, но здесь узлы *1* и *3* закреплены от поворота, а узел *2* жесткий.

Для решения задачи построим сначала матрицу жесткости рамы в целом сложением матриц жесткости отдельных ее элементов. Площадь и момент инерции поперечного сечения элементов при внешнем диаметре D=76 мм и внутреннем диаметре d=70 мм имеют следующие значения:

$$A = (\pi/4)\,(D^2 - d^2) = 6{,}88\ \text{см}^2 = 6{,}88 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2;$$

$$I = (\pi/64)\,(D^4 - d^4) = 45{,}9\ \text{см}^4 = 4{,}59 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^4.$$

Приняв в выражении (2.71) $I = l_1 = 1{,}5$ м (длина элемента *1–2*) и $\lambda = 1$, $\mu = 0$ (косинусы углов между осью элемента и осями x, y общей системы координат соответственно), получим матрицу жесткости элемента

$$[K]_{1-2} = k \cdot 10^{-3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}56 & -2{,}67 & 0 & -3{,}56 & -2{,}67 \\ 0 & -2{,}67 & 2{,}67 & 0 & 2{,}67 & 1{,}33 \\ \hline -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}56 & 2{,}67 & 0 & 3{,}56 & 2{,}67 \\ 0 & -2{,}67 & 1{,}33 & 0 & 2{,}67 & 2{,}67 \end{array}\right],$$

где $k = EA/l_1 = 32{,}1$ МН/м.

Аналогичным образом можно получить матрицу жесткости элемента $2-3$ при $\lambda=-0{,}5000$; $\mu=0{,}8660$, $l=l_2=3$ м:

$$[K]_{2-3}=k\cdot10^{-3}\left[\begin{array}{rrr|rrr}
125{,}33 & -216{,}31 & 0.58 & -125{,}33 & 216{,}31 & 0{,}58\\
-216{,}31 & 375{,}59 & 0{,}33 & 216{,}31 & -375{,}59 & 0{,}33\\
0{,}58 & 0{,}33 & 1{,}33 & -0{,}58 & -0{,}33 & 0{,}67\\
\hline
-125{,}33 & 216{,}31 & -0{,}58 & 125{,}33 & -216{,}31 & -0{,}58\\
216{,}31 & -375{,}59 & -0{,}33 & -216{,}31 & 375{,}59 & -0{,}33\\
0{,}58 & 0{,}33 & 0{,}67 & -0{,}58 & -0{,}33 & 1{,}33
\end{array}\right].$$

Здесь множитель k имеет то же значение, что и выше, и это удобно для последующего сложения матриц.

Согласно прямому методу жесткости матрица $[K]_{1-2}$ расширяется включением в нее нулевых седьмых, восьмых и девятых строк и столбцов, что указывает на отсутствие в элементе $1-2$ узла 3. Точно так же матрица $[K]_{2-3}$ дополняется нулевыми первыми тремя строками и столбцами, так как элемент $2-3$ не содержит узла 1. Складывая эти матрицы, получаем матрицу жесткости стержневой системы

$$[K]=k\cdot10^{-3}\left[\begin{array}{rrr|rrr|rrr}
1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 3{,}56 & -2{,}67 & 0 & -3{,}56 & -2{,}67 & 0 & 0 & 0\\
0 & -2{,}67 & 2{,}67 & 0 & 2{,}67 & 1{,}33 & 0 & 0 & 0\\
\hline
-1000 & 0 & 0 & 1125{,}33 & -216{,}31 & 0{,}58 & -125{,}33 & 216{,}31 & 0{,}58\\
0 & -3{,}56 & 2{,}67 & -216{,}31 & 379{,}15 & 3{,}00 & 216{,}31 & -375{,}59 & 0{,}33\\
0 & -2{,}67 & 1{,}33 & 0{,}58 & 3{,}00 & 4{,}00 & -0{,}58 & -0{,}33 & 1{,}33\\
\hline
0 & 0 & 0 & -125{,}33 & 216{,}31 & -0{,}58 & 125{,}33 & -216{,}31 & -0{,}58\\
0 & 0 & 0 & 216{,}31 & -375{,}59 & -0{,}33 & -216{,}31 & -375{,}59 & -0{,}33\\
0 & 0 & 0 & 0{,}58 & 0{,}33 & 0{,}67 & -0{,}58 & -0{,}33 & 1{,}33
\end{array}\right]$$

Граничные условия (см. рис. 2.18) записываются следующим образом: $u_1=v_1=\theta_1=0$; $u_3=v_3=\theta_3=0$; $F_{2x}=M_2=0$, $F_{2y}=-20$ кН.

На основании этих условий система уравнений $F=[K]\,u$, в которой матрица жесткости получена выше, может быть расчленена на две меньшего порядка

$$\begin{Bmatrix}F_{1x}\\F_{1y}\\M_1\\F_{3x}\\F_{3y}\\M_3\end{Bmatrix}=k\cdot10^{-3}\begin{bmatrix}-1000 & 0 & 0\\0 & -3{,}56 & -2{,}67\\0 & -2{,}67 & 1{,}33\\-125{,}33 & 216{,}31 & -0{,}58\\216{,}31 & -375{,}59 & -0{,}33\\0{,}58 & 0{,}33 & 0{,}67\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}$$

и

$$\begin{Bmatrix}F_{2x}\\F_{2y}\\M_2\end{Bmatrix}=k\cdot10^{-3}\begin{bmatrix}1125{,}33 & -216{,}31 & 0{,}58\\-216{,}31 & 379{,}15 & 3{,}00\\0{,}58 & 3{,}00 & 4{,}00\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}.$$

Решая последнюю систему уравнений относительно неизвестных перемещений u_2, v_2 и θ_2 при заданных $F_{2x}=M_2=0$ и $F_{2y}=-20$ кН, находим $u_2=-0{,}358\cdot10^{-3}$ м; $v_2=-1{,}86\cdot10^{-3}$ м; $\theta_2=1{,}45\cdot10^{-3}$ рад.

Из первой группы уравнений получим по найденным перемещениям u_2, v_2 и θ_2 усилия:

$$F_{1x}=11{,}494\ \text{кН};\quad F_{1y}=0{,}088\ \text{кН};\quad M_1=-0{,}0974\ \text{кН}\cdot\text{м};$$

$$F_{2x}=-11{,}494\ \text{кН};\quad F_{2y}=19{,}911\ \text{кН};\quad M_2=0{,}004\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Чтобы определить внутренние усилия $f_{1x}, f_{1y}, m_1, \ldots$, действующие по концам элемента $1-2$, надо умножить матрицу жесткости $[K]_{1-2}$ этого элемента на уже известные значения перемещений. Поскольку перемещения $u_1=v_1=\theta_1=0$, достаточно выполнить операцию

$$\begin{Bmatrix}f_{1x}\\f_{1y}\\m_1\\f_{2x}\\f_{2y}\\m_2\end{Bmatrix}=k\cdot10^{-3}\begin{bmatrix}-1000 & 0 & 0\\0 & -3{,}58 & -2{,}67\\0 & 2{,}67 & 1{,}33\\1000 & 0 & 0\\0 & 3{,}58 & 2{,}67\\0 & 2{,}67 & 2{,}67\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\v_2\\\theta_2\end{Bmatrix}.$$

В результате перемножения этих матриц получим

$$f_{1x}=11{,}494\ \text{кН};\quad f_{1y}=0{,}088\ \text{кН};\quad m_1=-0{,}0974\ \text{кН}\cdot\text{м};$$

$$f_{2x}=-11{,}494\ \text{кН};\quad f_{2y}=-0{,}088\ \text{кН};\quad m_2=-0{,}0354\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Эти внутренние усилия показаны на рис. 2.19, *а* вместе с эпюрами продольной силы N, поперечной силы Q и изгибающего момента M, которые определены из условия равновесия отсеченной части стержня (рис. 2.19, *б*); при этом применяется правило знаков для внутренних усилий, показанное на рис. 2.19, *в*.

Умножив матрицу жесткости $[K]_{2-3}$ на значения перемещений узла *2*, можно определить внутренние усилия, действующие по концам элемента $2-3$

$$f_{2x}=11{,}494\ \text{кН};\quad f_{2y}=-19{,}911\ \text{кН};\quad m_2=0{,}0354\ \text{кН}\cdot\text{м};$$

$$f_{3x}=-11{,}494\ \text{кН};\quad f_{3y}=19{,}911\ \text{кН};\quad m_3=0{,}0044\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Эти составляющие внутренних усилий относятся к общей системе осей координат и, поскольку элемент наклонен по отношению к этим осям, среди найденных усилий нет продольной и поперечной сил (рис. 2.20, *а*). Чтобы получить значения последних, необходимо воспользоваться выражением (2.66) и преобразовать составляющие внутренних усилий из общей системы осей в местную. В результате преобразования получим

$$\bar{f}_{2x} = -22{,}990 \text{ кН}; \quad \bar{f}_{2y} = -0{,}0013 \text{ кН}; \quad \bar{m}_2 = 0{,}0354 \text{ кН·м};$$
$$\bar{f}_{3x} = 22{,}990 \text{ кН}; \quad \bar{f}_{3x} = 0{,}0013 \text{ кН}; \quad \bar{m}_3 = 0{,}0044 \text{ кН·м}.$$

Эти составляющие усилий по концам элемента показаны на рис. 2.20, *б*, а построенные по ним эпюры продольной силы N, поперечной силы Q и изгибающего момента M – на рис. 2.20, *в*.

Вычислим напряжения в элементах с помощью формул (2.72)–(2.74). *Экстремальные значения напряжений от изгиба следует ожидать* у наружной поверхности, т. е. при $\bar{y} = \pm R$, в том сечении трубы, где изгибающий момент M наибольший по модулю. Нормальное напряжение от продольной силы неизменно по всей площади поперечного сечения и в данной задаче постоянно по длине элемента. Таким образом, экстремальные нормальные напряжения находятся как

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = N/A \pm MR/I.$$

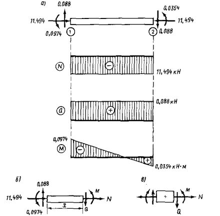


Рис. 2.19. Внутренние усилия в элементе 1–2: *а* – эпюры усилий; *б* – левая часть элемента; *в* – правило знаков.

В противоположность этому экстремальное касательное напряжение должно появляться в плоскости $\bar{y} = 0$ и в том сечении, где поперечная сила Q наибольшая по модулю. Значение статического момента площади сечения в формуле (2.74) находим по выражению $S = (2/3)(R^3 - r^3)$

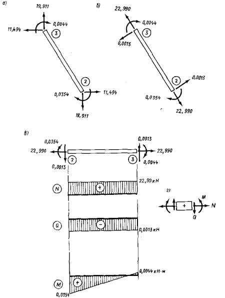


Рис. 2.20. Результаты расчета элемента 2–3: *а*, *б* – усилия, действующие по концам элемента в общей и местной системах осей координат; *в* – эпюры внутренних усилий; *г* – правило знаков для внутренних усилий.

и, таким образом, экстремальное касательное напряжение определяется [при $b = 2(R - r)$] по формуле

$$\tau = \frac{Q\,(R^3 - r^3)}{3I\,(R - r)}.$$

Применяя полученные здесь формулы к элементам *1–2* и *2–3* и используя результаты расчета на рис. 2.19 и 2.20, находим в *элементе 1–2*

$$\sigma_N = \frac{-11{,}94}{6{,}88\cdot 10^{-4}} = -16{,}71 \text{ МПа};$$

$$\sigma_M = \frac{\pm\,(-0{,}0974)\,38\cdot 10^{-3}}{4{,}59\cdot 10^{-7}} = \pm\, 8{,}06 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = -24{,}77 \text{ МПа}; \quad -8{,}65 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{0{,}88\,(5{,}487 - 4{,}287)\,10^{-7}}{3\cdot 4{,}59\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^{-3}} = +\,25{,}5 \text{ кПа};$$

в *элементе 2–3*

$$\sigma_N = \frac{22{,}990}{6{,}88\cdot 10^{-4}} = 33{,}41 \text{ МПа};$$

$$\sigma_M = \pm\,\frac{0{,}0354\cdot 38\cdot 10^{-3}}{4{,}59\cdot 10^{-7}} = \pm\, 2{,}93 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = 36{,}24 \text{ МПа}; \quad 30{,}48 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{(-0{,}0013)\,1{,}2\cdot 10^{-7}}{3\cdot 4{,}59\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^{-3}} = -3{,}8 \text{ кПа}.$$

Наибольшие касательные напряжения в элементах, как видно, очень малы в сравнении с нормальными напряжениями от изгиба. Это явление обычное для элементов, достаточно длинных по сравнению с их размерами в поперечном сечении для подобных элементов, которые, кстати, и применяются в строительной практике; касательные напряжения могут не учитываться, т. е. достаточно учитывать только нормальные напряжения от продольной силы и изгибающего момента.

Интересно сопоставить перемещения $\bar{u}$ напряжения, полученные здесь, и те, что были определены в примере 2.2–1, где полагалось, что концы элементов могут свободно поворачиваться. Сравнение результатов показывает, что перемещения u_2 и v_2, а также нормальные напряжения от продольной силы в элементах, по существу, одинаковы.

Однако за счет изгибающих моментов наибольшие нормальные напряжения увеличились в элементе *1–2* на 47 %, а в элементе *2–3* на 8 %. Увеличение значений напряжений будет меньшим, если жесткие защемления в узлах *1* и *3* заменить шарнирными опорами, допускающими поворот концов элементов. Расчеты показывают, что в таком случае жесткое соединение элементов в узле *2* будет приводить к менее чем 10 %-ному увеличению нормальных напряжений в сравнении с полученными при расчете фермы. Этот результат иллюстрирует известное положение строительной механики: в системе, которая должна работать как ферма (т. е. ее стержни будут нести только растягивающие или сжимающие усилия), должны быть исключены жесткие узловые соединения; расчеты системы как фермы являются хорошим приближением к точному, если элементы относительно гибкие, т. е. длинные по сравнению с их размерами в поперечном сечении.

Наконец, можно отметить, что составляющие внутренних сил в направлении осей x, y и изгибающие моменты в узле *1* элемента *1–2* и в узле *3* элемента *2–3* равны соответственно опорным реакциям, определенным с помощью матричных операций. Объясняется это тем, что реакции в опоре действуют здесь на конец только одного элемента. Если же в опорном узле будут сходиться два или большее число элементов, тогда опорные реакции должны равняться сумме соответствующих внутренних усилий в опорных сечениях элементов.

Пример 2.4–2. Покажем, что использование условий равновесия узла *2* в предыдущем примере приводит к тем же уравнениям, которые получились после расчленения матричного уравнения, сформированного с помощью прямого метода жесткости.

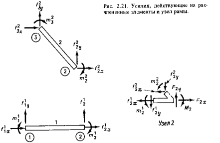


Рис. 2.21. Усилия, действующие на расчлененные элементы и узел рамы.

Расчленим стержневую систему на элементы и соединяющий их узел (рис. 2.21). Из условий равновесия $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$ для узла *2* получим

$$F_{2x} = f_{2x}^1 + f_{2x}^2;$$

$$F_{2y} = f_{2y}^1 + f_{2y}^2;$$

$$M_2 = m_2^1 + m_2^2.$$

Из соотношений между усилиями и перемещениями в отдельных элементах, полученных в примере 2.4–1, при заданных граничных условиях $u_1 = v_1 = \theta_1 = u_3 = v_3 = \theta_3 = 0$ следует

$$f_{2x}^1 = k u_2;$$

$$f_{2y}^1 = k \cdot 10^{-3} (3{,}58 v_2 + 2{,}67 \theta_2);$$

$$m_2^1 = k \cdot 10^{-3} (2{,}67 v_2 + 2{,}67 \theta_2);$$

$$f_{2x}^2 = k \cdot 10^{-3} (125{,}33 u_2 - 216{,}31 v_2 + 0{,}58 \theta_2);$$

$$f_{2y}^2 = k \cdot 10^{-3} (-216{,}31 u_2 + 375{,}59 v_2 + 0{,}33 \theta_2);$$

$$m_2^2 = k \cdot 10^{-3} (0{,}58 u_2 + 0{,}33 v_2 + 1{,}33 \theta_2).$$

Подставив это в уравнение равновесия узла *2* и представив результаты в матричной форме, будем иметь

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = k \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 1125{,}33 & -216{,}31 & 0{,}58 \\ -216{,}31 & 379{,}15 & 3{,}00 \\ 0{,}58 & 3{,}00 & 4{,}00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix},$$

что полностью совпадает с матричным уравнением, полученным в примере 2.4–4 с помощью прямого метода жесткости. Остальные матричные уравнения, необходимые для определения усилий в узлах *1* и *3*, могут быть получены аналогичным образом с помощью уравнений равновесия этих узлов.

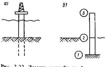


Рис. 2.22. Замена заглубленной в грунт части опорной колонны (*а*) эквивалентной по жесткости сваей (*б*).

Пример 2.4–3. Рассмотрим простейшее по конструкции сооружение (рис. 2.22, *а*) в виде заглубленной в грунтовое основание вертикальной опоры, поддерживающей платформу с оборудованием. В расчетной схеме часть опоры, находящаяся ниже морского дна, представляется эквивалентной

сваей, т. е. свободно стоящей (не контактирующей с грунтом по боковой поверхности) колонной с защемленным нижним концом (рис. 2.22, *б*), обладающей на уровне поверхности грунта такой же жесткостью, что и реальная опора в грунте. Получим для этой задачи матричное уравнение для определения перемещений узлов *2* и *3* при заданных внешних силовых воздействиях.

Пусть жесткость эквивалентной сваи на уровне морского дна описывается матрицей

$$[K_c] = \begin{bmatrix} a & 0 & -d \\ 0 & b & 0 \\ -d & 0 & c \end{bmatrix},$$

тогда соотношение между усилиями, действующими в сечении *2* сваи, и перемещениями будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & -d \\ 0 & b & 0 \\ -d & 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

Соотношение между усилиями по концам элемента *2–3* и перемещениями, в свою очередь, может быть представлено в виде

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & \dots & k_{27} \\ k_{32} & k_{33} & k_{34} & \dots & k_{37} \\ k_{42} & k_{43} & k_{44} & \dots & k_{47} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{72} & k_{73} & k_{74} & \dots & k_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix},$$

в котором коэффициенты жесткости k_{22}, k_{23} и другие могут быть определены с помощью выражения (2.71).

Использовав прямой метод жесткости, получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22}+a & k_{23} & k_{24}-d & \dots & k_{27} \\ k_{32} & k_{33}+b & k_{34} & \dots & k_{37} \\ k_{42}-d & k_{43} & k_{44}+c & \dots & k_{47} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{72} & k_{73} & k_{74} & \dots & k_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix},$$

которое может быть решено относительно перемещений при задании внешних усилий.

Учет равномерно распределенных нагрузок

В предыдущем изложении не предусматривались нагрузки, распределенные по длине элементов. Чтобы получить возможность учета таких нагрузок, обратимся снова к элементам балки (см. рис. 2.14) и рассмотрим его теперь при наличии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 2.23).

После выкладок, аналогичных сделанным ранее при выводе матричного уравнения (2.65), получим следующее соотношение между усилиями и перемещениями:

$$\left\{\begin{matrix} f_{1x} \\ f_{1y}-\dfrac{ql}{2} \\ m_1+\dfrac{ql^2}{12} \\ f_{2x} \\ f_{2y}-\dfrac{ql}{2} \\ m_2-\dfrac{ql^2}{12} \end{matrix}\right\}=\begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & & & & & \\ 0 & \dfrac{12EI}{l^3} & \text{Симметрично} & & & \\ 0 & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l} & & & \\ -\dfrac{EA}{l} & 0 & 0 & \dfrac{EA}{l} & & \\ 0 & -\dfrac{12EI}{l^3} & \dfrac{6EI}{l^2} & 0 & \dfrac{12EI}{l^3} & \\ 0 & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} & 0 & \dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}\right\}. \tag{2.75}$$

Сопоставление этого матричного уравнения с уравнением (2.65) показывает, что различие между ними заключается только в дополнительных членах в матрице усилий. Отсюда следует, что расчет на распределенные нагрузки можно проводить с помощью описанных выше процедур, если представить дополнительные члены в матрице усилий как эквивалентные сосредоточенные нагрузки по концам элементов. Используя для обозначения этих нагрузок верхний индекс „э" у символов усилий и моментов, будем иметь $f_{1y}^э=-ql/2$; $m_1^э=ql^2/12$ $=-ql/2$; $m_2^э=$ $=-ql^2/12$.

Пример приведения распределенных нагрузок к эквивалентным узловым показан на рис. 2.24. Последующие расчеты, связанные с распределением узловых перемещений, могут выполняться точно так же, как для систем, имеющих только узловые нагрузки.

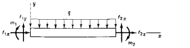


Рис. 2.23. Элемент плоской рамы, подверженный действию равномерно распределенной нагрузки.

При использовании эквивалентных узловых нагрузок будем обозначать суммы соответствующих действительных и эквивалентных усилий F_x^Σ, F_y^Σ и M^Σ. Если действительные узловые усилия F_x, F_y и M заданы, то суммарные усилия F_x^Σ и другие могут быть использованы для определения перемещений после расчленения основного матричного уравнения. Если же действительные узловые усилия являются реакциями опорных связей, как, например, в узле *1* на рис. 2.24, то по известным перемещениям могут быть определены сначала суммарные узловые усилия, а затем и действительные реакции опорных связей из уравнений

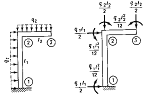


Рис. 2.24. Пример приведения заданных распределенных нагрузок к эквивалентным узловым усилиям.

$$\left.\begin{aligned} F_x^\Sigma&=F_x+F_x^э; \\ F_y^\Sigma&=F_y+F_y^э; \\ M^\Sigma&=M+M^э, \end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

в которых $F_x^э$, $F_y^э$ и $M^э$ обозначают эквивалентные узловые нагрузки.

Введем для элементов, имеющих распределенную нагрузку, обозначения суммарных (действительных плюс эквивалентных) внутренних усилий по концам элемента: f_x^Σ, f_y^Σ и m^Σ. Когда узловые перемещения известны, эти суммарные усилия могут быть определены, как и ранее, умножением матрицы жесткости отдельного элемента на значение перемещений концов элемента. Действительные внутренние усилия f_x, f_y, m находятся далее из равенств

$$\left.\begin{aligned} f_x^\Sigma&=f_x+f_x^э; \\ f_y^\Sigma&=f_y+f_y^э; \\ m^\Sigma&=m+m^э, \end{aligned}\right\} \tag{2.77}$$

где $f_x^э$, $f_y^э$ и $m^э$ обозначают сосредоточенные нагрузки, эквивалентные распределенной нагрузке.

Если положить в матричном уравнении (2.75) все перемещения равными нулю, то получатся следующие действительные внутренние усилия:

$$f_{1x}=0;\quad f_{1y}=-f_{1y}^э;\quad m_1=-m_1^э;$$
$$f_{2x}=0;\quad f_{2y}=-f_{2y}^э;\quad m_2=-m_2^э.$$

Так как действительные внутренние усилия равны реакциям опорных связей, последнее равенство подсказывает простой способ определения эквивалентных узловых нагрузок в тех случаях, когда неузловая нагрузка не является равномерно распределенной. Достаточно определить от этой нагрузки реакции опорных связей, которые должны быть поставлены для закрепления концов элемента от всех возможных перемещений. Эти реакции равны по значению и противоположны по направлению эквивалентным узловым нагрузкам.

Пример 2.4–4. Опора навигационного маяка (рис. 2.25, *а*) выполнена в виде стальной колонны высотой 7,5 м с внешним диаметром 1,5 м и толщиной стенки 25 мм. Колонна заделана понизу в бетонный массив. Принятая схема нагружения колонны от ветро-волнового воздействия и собственного веса показана на рис. 2.25, *б*. Упрощенно считается, что собственный вес колонны включен в усилие 400 кН, сосредоточенное на ее верхнем конце и вызванное в основном весом площадки с маяком. Определим перемещения верхнего конца колонны и возникающие в ней под действием заданных нагрузок максимальные напряжения.

Представим колонну в виде соединения двух элементов *1–2* и *2–3* (см. рис. 2.25, *б*). Матрицы жесткости этих элементов формируем с помощью выражения (2.71). При $E=210$ ГПа, $A=0{,}116$ м^2, $I=0{,}0315$ м^4 получим:

для элемента *1–2* ($\lambda=0, \mu=1, l=l_1=5$ м)

$$[K]_{1-2}=E\cdot 10^{-3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3{,}024 & 0 & 7{,}560 & -3{,}024 & 0 & 7{,}560 \\ 0 & 23{,}20 & 0 & 0 & -23{,}20 & 0 \\ 7{,}560 & 0 & 25{,}20 & -7{,}560 & 0 & 12{,}60 \\ \hline -3{,}024 & 0 & -7{,}560 & 3{,}024 & 0 & -7{,}560 \\ 0 & -23{,}20 & 0 & 0 & 23{,}20 & 0 \\ 7{,}560 & 0 & 12{,}60 & -7{,}560 & 0 & 25{,}20 \end{array}\right]$$

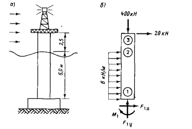


Рис. 2.25. Опорная колонна маяка (*а*) и ее расчетная схема (*б*).

для элемента *2–3* ($\lambda=0, \mu=1, l=l_2=2{,}5$ м)

$$[K]_{2-3}=E\cdot 10^{-3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 24{,}19 & 0 & 30{,}24 & -24{,}19 & 0 & 30{,}24 \\ 0 & 46{,}40 & 0 & 0 & -46{,}40 & 0 \\ 30{,}24 & 0 & 50{,}40 & -30{,}24 & 0 & 25{,}20 \\ \hline -24{,}19 & 0 & -30{,}24 & 24{,}19 & 0 & -30{,}24 \\ 0 & -46{,}40 & 0 & 0 & 46{,}40 & 0 \\ 30{,}24 & 0 & 25{,}20 & -30{,}24 & 0 & 50{,}40 \end{array}\right].$$

Распределенную нагрузку интенсивностью $q=6$ кН/м на элементе *1–2* приводим к эквивалентным сосредоточенным в узлах нагрузкам: $F_{1x}=F_{2x}=ql_1/2=15$ кН; $M_1=-M_2=ql_1^2/12=12{,}5$ кН·м.

Сложив их с действительными нагрузками $F_{3x}=20$ кН и $F_{3y}=-400$ кН, получим граничные условия на усилия в узлах *2* и *3*

$$F_{2x}^{\Sigma}=15 \text{ кН};\quad F_{2y}^{\Sigma}=0;\quad M_2^{\Sigma}=-12{,}5 \text{ кНм};$$

$$F_{3x}^{\Sigma}=20 \text{ кН};\quad F_{3y}^{\Sigma}=-400 \text{ кН};\quad M_3^{\Sigma}=0.$$

Граничные условия на перемещения в узле *1* $u_1=v_1=\theta_1=0$. Далее прямой метод жесткости приводит к следующим двум системам уравнений:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x}^{\Sigma} \\ F_{1y}^{\Sigma} \\ M_1^{\Sigma} \end{Bmatrix}=E\cdot 10^{-3}\begin{bmatrix} -3{,}024 & 0 & 7{,}560 \\ 0 & -23{,}20 & 0 \\ -7{,}560 & 0 & 12{,}60 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2x}^{\Sigma} \\ F_{2y}^{\Sigma} \\ M_2^{\Sigma} \\ F_{3x}^{\Sigma} \\ F_{3y}^{\Sigma} \\ M_3^{\Sigma} \end{Bmatrix}=E\cdot 10^{-3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 27{,}21 & 0 & 22{,}68 & -24{,}19 & 0 & 30{,}24 \\ 0 & 69{,}60 & 0 & 0 & -46{,}40 & 0 \\ 22{,}68 & 0 & 75{,}60 & -30{,}24 & 0 & 25{,}20 \\ \hline -24{,}19 & 0 & -30{,}24 & 24{,}19 & 0 & -30{,}24 \\ 0 & -46{,}40 & 0 & 0 & 46{,}40 & 0 \\ 30{,}24 & 0 & 25{,}20 & -30{,}24 & 0 & 50{,}40 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}.$$

Решив вторую систему уравнений относительно неизвестных перемещений при известных значениях суммарных узловых нагрузок, получим $u_2=0{,}293\cdot 10^{-3}$ м; $v_2=-0{,}082\cdot 10^{-3}$ м; $\theta_2=0{,}0951\cdot 10^{-3}$ рад; $u_3=0{,}547\cdot 10^{-3}$ м; $v_3=-0{,}123\cdot 10^{-3}$ м; $\theta_3=0{,}1046\cdot 10^{-3}$ рад. Затем из первой системы по найденным перемещениям узла *2* определим суммарные узловые усилия в колонне на уровне заделки в бетонный массив: $F_{1x}^{\Sigma}=-35$ кН; $F_{1y}^{\Sigma}=400$ кН; $M_1^{\Sigma}=-212{,}5$ кН·м.

Действительные реакции опорных связей в узле *1* определяются по уравнениям (2.76)

$$F_{1x}=F_{1x}^{\Sigma}-15=-50 \text{ кН};$$

$$F_{1y}=F_{1y}^{\Sigma}=400 \text{ кН};$$

$$M_1=M_1^{\Sigma}-12{,}5=-225 \text{ кН·м}.$$

Теперь рассмотрим внутренние усилия и моменты, действующие по концам элемента *1–2*. Значения суммарных внутренних усилий

5–566

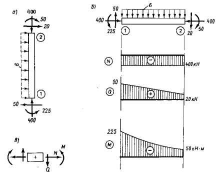


Рис. 2.26. Результаты расчета элемента *1–2* колонны: *а* – усилия, действующие по концам элемента; *б* – эпюры внутренних усилий; *в* – правило знаков для внутренних усилий.

получаются умножением матрицы жесткости этого элемента на перемещения узлов *1* и *2*

$f_{1x}^{\Sigma}=-35$ кН; $f_{1y}^{\Sigma}=400$ кН; $m_1^{\Sigma}=-212{,}5$ кН·м;

$f_{2x}^{\Sigma}=35$ кН; $f_{2y}^{\Sigma}=-400$ кН; $m_2^{\Sigma}=37{,}5$ кН·м.

Действительные внутренние усилия находятся с помощью уравнения (2.77)

$f_{1x}=f_{1x}^{\Sigma}-15=-50$ кН;

$f_{1y}=f_{1y}^{\Sigma}=400$ кН;

$m_1=m_1^{\Sigma}-12{,}5=-225$ кН·м;

$f_{2x}=f_{2x}^{\Sigma}-15=20$ кН;

$f_{2y}=f_{2y}^{\Sigma}=-400$ кН;

$m_2=m_2^{\Sigma}+12{,}5=50$ кН·м.

Эти внутренние усилия и построенные по ним эпюры внутренних усилий показаны на рис. 2.26. Максимальный изгибающий момент

действует в сечении *1* и равен -225 кН·м. Экстремальные нормальные напряжения от изгиба

$$\sigma_M=\pm\frac{MR}{I}=\pm\frac{225\cdot 0{,}75}{0{,}0315}=\pm 5{,}36\ \text{МПа}.$$

Нормальное напряжение от сжимающей продольной силы, которая неизменна по длине элемента и равна -400 кН,

$$\sigma_N=\frac{N}{A}=\frac{-400}{0{,}116}=-3{,}45\ \text{МПа}.$$

Максимальное (по модулю) значение нормального напряжения $\sigma=\sigma_M+\sigma_N$ оказывается на сжатой от изгиба стороне колонны и равно $\sigma=-8{,}81$ МПа.

И наконец, определим внутренние усилия, действующие в элементе *2–3*. Умножив матрицу жесткости этого элемента на матрицу-столбец найденных ранее перемещений концов элемента, получим

$f_{2x}^{\Sigma}=-20$ кН; $f_{2y}^{\Sigma}=400$ кН; $m_2^{\Sigma}=-50$ кН·м;

$f_{3x}^{\Sigma}=20$ кН; $f_{3y}^{\Sigma}=-400$ кН; $m_3^{\Sigma}=0$.

Так как у элемента *2–3* нет эквивалентных сосредоточенных нагрузок, то действительные и суммарные усилия равны между собой. Внутренние усилия, действующие по концам рассматриваемого элемента, и построенные по ним эпюры показаны на рис. 2.27.

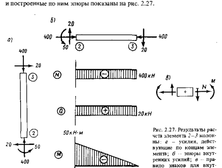


Рис. 2.27. Результаты расчета элемента *2–3* колонны: *а* – усилия, действующие по концам элемента; *б* – эпюры внутренних усилий; *в* – правило знаков для внутренних усилий.

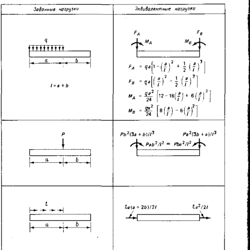


Рис. 2.28. Приведение заданных неузловых нагрузок к эквивалентным узловым: *а* – заданные элементы; *б* – эквивалентные нагрузки.

Экстремальные напряжения от изгиба элемента *2–3* возникают в сечении *2*

$$\sigma_M = \pm\frac{MR}{I} = \pm\frac{50\cdot 0{,}75}{0{,}0315} = \pm 1{,}19 \text{ МПа},$$

а напряжения от сжимающей продольной силы

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{-400}{0{,}116} = -3{,}45 \text{ МПа}.$$

Максимальное (по модулю) напряжение $\sigma = \sigma_M + \sigma_N$ в этом элементе возникает на сжатой от изгиба стороне в сечении *2* и равно $\sigma = -4{,}64$ МПа.

Таким образом, горизонтальное отклонение верха колонны и максимальное нормальное напряжение в ней равны соответственно $u_3 = 0{,}547\cdot 10^{-3}$ мм; $\sigma = -8{,}81$ МПа. При этом максимальное напряжение оказывается у основания колонны на сжатой от изгиба стороне.

Другие виды неузловых нагрузок

Порядок расчета, установленный выше для случая, когда по длине элемента есть равномерно распределенная нагрузка, пригоден и при иных видах нагрузок на элементе. Три других вида нагрузок и соответствующие им эквивалентные сосредоточенные концевые усилия показаны на рис. 2.28.

2.5. Пространственные рамы

Бóльшая часть рамных конструкций представляет собой набор элементов, каждый из которых испытывает действие продольных и поперечных сил, крутящего и изгибающего момента, как показано на рис. 2.29. Силы и моменты на рисунке отнесены к местным осям $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, причем оси $\bar{y}$ и $\bar{z}$ находятся в плоскости поперечного сечения элемента, а ось $\bar{x}$ – вдоль его оси. Все усилия, действующие по концам элемента, изображены на рисунке положительными. Для перемещений, соответствующих этим силам и моментам, применяется такое же правило знаков.

Если представить составляющие усилий и соответствующих им перемещений в виде матриц

$$\{\bar{f}\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_{1x} \\ \bar{f}_{1y} \\ \bar{f}_{1z} \\ \bar{m}_{1x} \\ \bar{m}_{1y} \\ \bar{m}_{1z} \\ \bar{f}_{2x} \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_{1x} \\ \bar{\theta}_{1y} \\ \bar{\theta}_{1z} \\ \bar{u}_{2x} \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}, \tag{2.78}$$

то соотношение между ними может быть выражено как

$$\{\bar{f}\} = [\bar{K}]\{\bar{u}\},$$

где $[\bar{K}]$ – матрица жесткости элемента, которая может быть сформирована аналогично (2.65) для двухмерного элемента. Для частного случая, когда элемент имеет кольцевое поперечное сечение, матрица имеет следующий вид:

$$
[\overline{K}] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & & & & \text{Симметрично} & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & & & & & & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} & & & & & & \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix},
$$

где l – длина элемента; D и d – внешний и внутренний диаметры поперечного сечения; E и G – модули упругости и сдвига материала; $I = (\pi/64)(D^4 - d^4)$ – момент инерции; $J = (\pi/32)(D^4 - d^4)$ – полярный момент инерции; $A = (\pi/4)(D^2 - d^2)$ – площадь поперечного сечения элемента. Более общий случай, т. е. соответствующий произвольной форме *поперечного сечения элемента*, рассмотрен в [47].

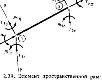


Рис. 2.29. Элемент пространственной рамной системы.

Из матриц жесткости $[\overline{K}]$ отдельных элементов, преобразованных в общую систему осей координат, можно сформировать матрицу жесткости всей системы элементов, используя для этого прямой метод жесткости. Преобразование матрицы жесткости элемента из местной системы осей в общую выполняется, как и ранее, с помощью выражения

$$[K] = [C]^{T}[\overline{K}][C], \tag{2.79}$$

где $[C]$ обозначает матрицу преобразования. Она формируется из подматриц $[C_1]$ и $[0]$:

$$
[C] = \begin{bmatrix}
[C_1] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [C_1] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [C_1] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [C_1]
\end{bmatrix},
$$

где

$$
[C_1] = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\
\lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\
\lambda_3 & \mu_3 & \nu_3
\end{bmatrix}; \quad
[0] = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

В матрице $[C_1]$ приняты следующие обозначения: λ_1 – косинус угла между осями x и $\bar{x}$; μ_1 – косинус угла между осями y и $\bar{x}$; ν_1 – косинус угла между осями z и $\bar{x}$ и т. д.

Если матрица жесткости системы сформирована, то при задании граничных условий можно определить перемещения и усилия так же, как и ранее. Объем вычислений для пространственных задач, однако, существенно возрастает, и решение этих задач имеет смысл при полной автоматизации вычислительного процесса. В настоящее время эксплуатируется множество программ автоматизированного расчета, и их использование сводится, по существу, к заданию характеристик поперечных сечений отдельных элементов, координат x, y, z концов элементов в общей системе осей и указанию граничных условий. Построение матрицы жесткости системы, вычисление перемещений и внутренних усилий по концам отдельных элементов – все это выполняется на ЭВМ автоматически.

Несмотря на то что большинство реальных сооружений относится к пространственным, в ряде случаев удается свести их расчет к решению плоской задачи. Покажем это на примере.

Пример 2.5–1. Рассмотрим стальную пространственную конструкцию, изображенную на рис. 2.30, и определим перемещение узла *4*, используя пространственную и плоскую расчетные схемы. Все четыре стороны фермы одинаковы, также одинаковы и нагрузки, действующие на двух противоположных ее сторонах. Все элементы фермы выполнены из труб; стойки в нижней части (до уровня узлов 2,6)

Рис. 2.30. Схема опорной конструкции ферменного типа.

Таблица 2.2. Перемещения узла *4*, полученные при использовании различных расчетных схем сооружения

Расчетная схема	Перемещения, м		
	u	v	w
Пространственная	$2{,}646 \cdot 10^{-2}$	$1{,}801 \cdot 10^{-3}$	$1{,}707 \cdot 10^{-5}$
Плоская	$2{,}655 \cdot 10^{-2}$	$1{,}829 \cdot 10^{-3}$	0

имеют внешний диаметр $D = 121{,}6$ см и толщину стенки $\delta = 38$ мм, в верхней части $D = 118{,}6$ см, и $\delta = 25{,}4$ мм; горизонтальные и наклонные стержни имеют $D = 60{,}8$ см, $\delta = 12{,}7$ мм. Нижние концы стоек полагают-ся жестко защемленными.

Результаты вычисления перемещений узла *4* отражены в табл. 2.2. Значения перемещений, полученные для пространственной и плоской расчетных схем, отличаются несущественно: так, перемещения в на-правлении действия нагрузки разнятся всего на 0,4 %. Пренебрежимо малые горизонтальные перемещения в направлении, поперечном дей-ствию нагрузки, являются результатом деформации диагональных элементов фронтальной и тыловой (по отношению к нагрузке) сторон фермы. В плоской схеме стержни этих решеток, конечно же, не учиты-ваются. Однако, погрешность расчета упрощенной расчетной схемы не-значительна, т. е. плоская схема вполне приемлема для этой конструк-ции при указанных условиях нагружения.

Задачи

1. Цилиндрический стальной элемент ($E = 210$ ГПа) длиной 6 м и диаметром 12 см нагружен силой $P = 200$ кН, приложенной, как показано на рис. 2.31. Полагая, что перемещения $u_1 = u_3 = 0$, определить перемещение u_2 и опорные реакции F_1 и F_3.

Ответ: $u_2 = 0{,}095 \cdot 10^{-3}$ м; $F_1 = -150$ кН; $F_3 = -0{,}50$ кН.

2. Стальная колонна ($E = 210$ ГПа) высотой 4,5 м и диаметром 12 см (рис. 2.32) нагружена силами $P_1 = 120$ кН и $P_2 = 80$ кН.

Требуется: а) построить матрицу жесткости системы; б) определить неизвестные опорные реакции и перемещения, полагая $u_1 = u_4 = 0$; в) определить напряжения в элементах *1–2*, *2–3* и *3–4*.

Ответы:

а)

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix},$$

где $k = EA/l = 1{,}583$ ГПа/м;

б) $u_2 = 0{,}67 \cdot 10^{-3}$ м; $u_3 = 0{,}059 \cdot 10^{-3}$ м; $F_1 = -106{,}7$ кН; $F_4 = -93{,}3$ кН;

в) $\sigma_{1-2} = 11{,}76$ МПа; $\sigma_{2-3} = -1{,}18$ МПа; $\sigma_{3-4} = 8{,}25$ МПа.

3. Дана ферма (рис. 2.33), собранная из алюминиевых ($E = 70$ ГПа) стержней площадью поперечного сечения $A = 4{,}8$ см^2 и нагруженная силой $P = 5$ кН.

Требуется:

а) построить матрицу жесткости системы;

б) полагая узлы *1* и *2* закрепленными от линейных перемещений, определить перемещения узла *2* и опорные реакции;

в) определить внутренние усилия в стержнях.

Ответы:

б) $u_2 = 0$; $v_2 = -0{,}112 \cdot 10^{-3}$ м; $F_{1x} = -F_{3x} = 1{,}445$ кН; $F_{1y} = F_{3y} = 2{,}5$ кН;

в) $N_{1-2} = N_{2-3} = -2{,}89$ кН.

4. Для фермы *1–2–3–4–5* на рис. 2.34, стержни которой имеют одинаковую длину l, площадь поперечного сечения A и модуль упругости материала E, составить матричные уравнения для определения неизвестных перемещений и реакций опорных связей. Узлы *1* и *3* считать закрепленными от линейных перемещений, а узлы *2*, *4* и *5* незакрепленными.

5. Для рамы, показанной на рис. 2.35, составить матричные уравнения, связывающие заданные нагрузки F, G и M с неизвестными перемещениями узла *2*. Стержни рамы имеют одинаковые l, A, I и E. Узлы *1* и *3* считать жестко защемленными.

Ответ:

$$\begin{Bmatrix} F \\ -G \\ -M \end{Bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} \frac{12I}{l^2} + A & 0 & -\frac{6I}{l} \\ 0 & \frac{12I}{l^2} + A & -\frac{6I}{l} \\ -\frac{6I}{l} & -\frac{6I}{l} & 8I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

6. Для рамы, представленной на рис. 2.35, определить перемещения u_2, v_2 и θ_2, полагая $E = 210$ ГПа; $I = 5{,}21 \cdot 10^{-5}$ м^4; $A = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^2; $l = 4$ м; $G = 200$ кН; $F = M = 0$.

7. Для рамы, рассмотренной в задаче 5, при условиях, указанных в задаче 6, определить внутренние усилия, действующие по концам элементов *1–2* и *2–3*. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для каждого элемента и определить в них максимальные значения нормальных напряжений (от продольной силы и изгибающего момента в сумме), полагая, что сечения обоих элементов имеют форму квадрата со стороной 5 см.

8. Для рамы (рис. 2.36) с характеристиками $E = 210$ ГПа; $I = 1{,}73 \cdot 10^{-5}$ м^4; $A = 0{,}0144$ м^2; $l = 4$ м:

а) составить матричные уравнения для определения неизвестных перемещений и реакций опорных связей;

б) написать граничные условия в усилиях, заменив распределенные нагрузки эквивалентными сосредоточенными по концам элементов усилиями.

9. В задаче 8 по перемещениям $u_2 = 0{,}02535$ м; $v_2 = -0{,}0463 \cdot 10^{-4}$ м; $\theta_2 = 0{,}01047$ рад определить внутренние усилия, действующие по концам элемента *1–2*.

Ответ: $f_{1x} = -6$ кН; $f_{1y} = 3{,}5$ кН; $m_1 = -17{,}5$ кН · м; $f_{2x} = 0$; $f_{2y} = -3{,}5$ кН; $m_2 = 5{,}5$ кН · м.

10. По результатам решения задачи 9 построить эпюры внутренних усилий в элементе *1–2* (рис. 2.36). Определить экстремальные нормальные напряжения в элементе, полагая его поперечное сечение в виде квадрата со стороной 12 см.

Ответ: $\sigma = -67{,}08$ МПа; $+66{,}60$ МПа.

11. Составить матрицу жесткости размером 12 x 12 для матричного уравнения, необходимого для определения неизвестных узловых перемещений, системы, изображенной на рис. 2.37. Считать, что усилия в узлах *2*, *3*, *5*, *6* заданы, а узлы *1* и *4* закреплены от всех возможных перемещений. Вертикальные элементы имеют характеристики E, A_1, I_1, l_1, горизонтальные – E, A_2, I_2, l_2.

12. Опорная конструкция стационарной буровой установки (рис. 2.38, *а*) состоит из четырех цилиндрических колонн, имеющих внешний диаметр 1,20 м и стенки толщиной 25 мм, которые соединены поверху четырьмя горизонтальными цилиндрическими связями внешним диаметром 0,6 м и толщиной стенки 12 мм. Опорная конструкция поддерживает платформу с оборудованием общим весом 660 кН. Все четыре боковые стороны установки одинаковые. Материал конструкции – сталь ($E = 210$ ГПа).

В штормовых условиях конструкция испытывает суммарную горизонтальную нагрузку от ветрового воздействия 40 кН и от волнового воздействия 200 кН. При-

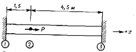


Рис. 2.31. К задаче 1.

Рис. 2.32. К задаче 2.

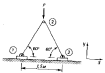


Рис. 2.33. К задаче 3.

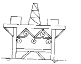


Рис. 2.34. К задаче 4.

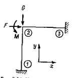


Рис. 2.35. К задачам 5, 6, 7.

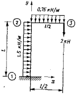


Рис. 2.36. К задачам 8, 9, 10.

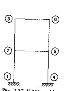


Рис. 2.37. К задаче 11.

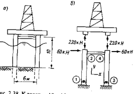


Рис. 2.38. К задачам 12 и 13.

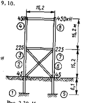


Рис. 2.39. К задаче 14.

ближенно считается, что эти нагрузки приложены к верхней части опорной конструкции и делятся поровну между четырьмя колоннами. Вес опорной конструкции, равный 220 кН, учитывается как дополнение к весу платформы с оборудованием. Общий вес сооружения, 880 кН, делится поровну между опорными колоннами. Схема нагружения одной боковой стороны установки показана на рис. 2.38, *б*.

Полагая, что опорные колонны закреплены в грунте от линейных перемещений (но имеют возможность для поворота), определить:

а) неизвестные узловые перемещения конструкции;

б) экстремальные нормальные напряжения в каждом элементе стороны установки, показанной на рис. 2.38, *б*.

Ответы:

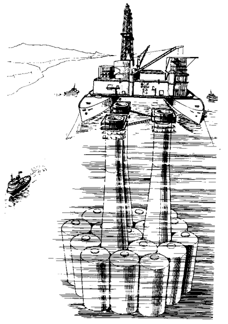
а) $\theta_1 = \theta_3 = 3{,}873 \cdot 10^{-3}$ рад;
$u_2 = u_4 = 35{,}74 \cdot 10^{-3}$ м;
$v_2 = -0{,}010 \cdot 10^{-3}$ м; $v_4 = -0{,}217 \cdot 10^{-3}$ м;
$\theta_2 = \theta_4 = 2{,}976 \cdot 10^{-3}$ рад.
б) $\sigma_{1-2} = -22{,}81$ МПа; $+22{,}38$ МПа (в узле *2*);
$\sigma_{3-4} = -27{,}15$ МПа; $+18{,}05$ МПа (в узле *4*);
$\sigma_{2-4} = \pm 187{,}5$ МПа (в узлах *2* и *4*).

13. Решить задачу 12 при условии замены неподвижной шарнирной опоры в узле *3* шарнирной катковой опорой (допускающей горизонтальное смещение узла).

Ответы:

а) $\theta_1 = 13{,}69 \cdot 10^{-3}$ рад;
$u_2 = 131{,}0 \cdot 10^{-3}$ м; $v_2 = -0{,}010 \cdot 10^{-3}$ м;
$\theta_2 = 11{,}90 \cdot 10^{-3}$ рад; $\theta_3 = -5{,}95 \cdot 10^{-3}$ рад;
$u_4 = 130{,}2 \cdot 10^{-3}$ м; $v_4 = -0{,}217 \cdot 10^{-3}$ м;
$\theta_4 = -5{,}95 \cdot 10^{-3}$ рад.
б) $\sigma_{1-2} = -45{,}42$ МПа; 44,98 МПа (в узле *2*);
$\sigma_{3-4} = -4{,}55$ МПа (в узлах *3* и *4*);
$\sigma_{2-4} = 190{,}2$ МПа; $-184{,}8$ (в узле *2*).

14. Составить матрицу жесткости размером 18 x 18 для определения неизвестных перемещений в стальной конструкции, показанной на рис. 2.39, полагая заданными усилия, приложенные к узлам *2, 3, 4* и *6, 7, 8* при условии, что узлы *1* и *5* жестко защемлены. Вертикальные элементы выше морского дна имеют поперечные сечения площадью $A = 0{,}140$ м² и моментом инерции $I = 24{,}4 \cdot 10^{-3}$ м⁴; горизонтальные и наклонные элементы имеют сечения с характеристиками $A = 0{,}0236$ м² и $I = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$ м⁴; эквивалентные сваи имеют характеристики $A = 0{,}0148$ м² и $I = 19{,}6 \cdot 10^{-3}$ м⁴. Модуль упругости материала $E = 210$ ГПа.



Наведение верхнего строения буровой платформы на железобетонное опорное основание.

3. ВНЕШНИЕ НАГРУЗКИ

Перед расчетом проектируемого сооружения необходимо получить количественные оценки для всех основных нагрузок, которым оно может быть подвергнуто со стороны окружающей среды в океане. В инженерных расчетах воздействия окружающей среды характеризуются в основном ветром в приводном слое атмосферы, поверхностными волнами и течениями, возникающими в условиях жесткого шторма (рис. 3.1).

Штормовой ветер играет существенную роль в расчете морского гидротехнического сооружения, поскольку он оказывает значительное силовое воздействие на надводную часть сооружения. Скорость ветра при урагане может, например, достигать 50 м/с, при этом горизонтальная ветровая нагрузка на типичное сооружение может превысить 500 кН.

Поверхностные волны в штормовых условиях также имеют важное значение в расчете прочности сооружения из-за значительных нагрузок на его подводную часть от сопровождающего волнение движения масс воды. Высота волны (разница между максимальным и минимальным уровнями воды в любой момент времени) в Мексиканском заливе достигает в период шторма 15 м, а вызванное ими движение воды оказывает на сооружение горизонтальную нагрузку, в несколько раз превышающую ветровую.

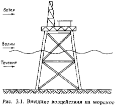


Рис. 3.1. Внешние воздействия на морское гидротехническое сооружение.

Наконец, в некоторых районах моря существенную добавку к нагрузке на подводную часть сооружения могут оказать течения. *Под течением понимается* общее движение масс воды, причины которого иные, чем те, которые вызывают поверхностные волны. Это, например, приливные течения, вызванные силами притяжения Луны и Солнца, ветровые или дрейфовые течения, связанные с трением воздушных потоков о поверхность воды, течения, связанные с речными стоками, и, наконец, океанические течения, обусловленные широкомасштабными ветровыми системами над океаном. В штормовых условиях поверхностные течения со скоростью 0,6 м/с и более не являются чем-то необычным: связанная с ними горизонтальная нагрузка на сооружение на 10 % или более увеличивает нагрузку, вызванную волнами.

Настоящая глава посвящена описанию перечисленных воздействий окружающей среды и инженерной оценки нагрузок от этих воздействий на гидротехнические морские сооружения.

3.1. Скорость ветра

Ветровые нагрузки, действующие на сооружение, зависят от формы и площади парусности его элементов, а также от скорости ветра. Наибольшая скорость ветра в районе эксплуатации сооружения может быть установлена анализом ежесуточных метеорологических сводок. Вследствие пульсации скорости ветра в период измерений приходится осреднять скорости ветра за некоторый конечный интервал времени. В США интервалом осреднения обычно принято считать время, за которое через пункт наблюдения проходит столб воздуха длиной в 1 милю (1852 м). *Наискорейшая миля ветра* – это наибольшее значение измеренной таким образом скорости ветра в течение суток, а *экстремальная за год наискорейшая миля ветра** – это наибольший из суточных максимумов скорости ветра, зарегистрированных в течение одного года.

Рис. 3.2. Рекомендуемые для различных прибрежных районов США значения годовых максимумов скоростей ветра, (м/с), на уровне 10 м над поверхностью воды при 100-летнем периоде повторяемости [42].

* Выделенные курсивом выражения переведены дословно, с тем чтобы показать читателю специфику американской терминологии. Далее в книге вместо этих выражений будут использоваться термины *максимальная осредненная скорость* и *годовой максимум средней скорости*.

На рис. 3.2. приведен статистический прогноз годового максимума средней скорости с повторяемостью один раз в 100 лет для различных прибрежных районов на уровне 10 м от поверхности земли. Для расчета сооружений принимаются либо эти данные, либо соответствующие 50-летнему периоду повторяемости, причем последние примерно на 10 % ниже отвечающих 100-летнему периоду. Для большинства стационарных наземных сооружений обычно используется 50-летний период повторяемости, однако для морских гидротехнических сооружений, разрушение которых связано с особо большим материальным ущербом и человеческими жертвами, рекомендуется принимать 100-летний период повторяемости.

Таблица 3.1. **Вероятность превышения за первые *m* лет значений скорости ветра с повторяемостью в 100 и 50 лет**

m лет	100 лет	50 лет
1	1	2
5	5	10
10	10	18
20	18	33
50	39	64
100	63	87

Приведенные на рис. 3.2 значения скоростей ветра 100-летней повторяемости получены на основании статистических расчетов, и есть определенная вероятность превышения этих значений в течение какого-либо периода. Возможность повторения таких скоростей ветра через 100 лет надо понимать *в среднем*. Вероятность превышения указанных значений скоростей ветра за первые m лет отражена в табл. 3.1. Там же для сравнения приведены данные, соответствующие периодам повторяемости, равным 100 и 50 годам. Отсюда видно, что за расчетный срок службы сооружения, равный, например, 20 годам, вероятность превышения скорости ветра, соответствующего 100-летнему периоду повторяемости, составляет *18 %*. Это не означает, *конечно, 18 %-ную вероятность разрушения* сооружения, рассчитанного на ветровую нагрузку со 100-летним периодом повторяемости, поскольку возможность некоторого превышения нагрузки предусмотрена в коэффициенте запаса.

Скорости ветра, указанные на рис. 3.2, относятся к высоте 10 м над поверхностью земли. Для определения скоростей ветра на других высотах имеется зависимость, справедливая в диапазоне высот до 180 м

$$v = v_0 (y/10)^{1/7}, \tag{3.1}$$

где v – скорость ветра на высоте y (в метрах) над поверхностью земли; v_0 – скорость на высоте 10 м.

При отсутствии более точной информации скорость ветра над водой в месте эксплуатации сооружения обычно полагается на 10 % больше той, что установлена на ближайшей наземной станции. Например, если по данным наземной станции на побережье Мексиканского залива на высоте 10 м скорость ветра с повторяемостью один раз в 100 лет составляет 60 м/с, то над водной поверхностью она ожидается в 1,1 раза больше, т. е. около 65 м/с.

Таблица 3.2. **Значения коэффициента порывистости [4]**

Годовой максимум средней скорости, м/с	Интервал осреднения, с					
	60	30	20	10	5	0,5
30	1,00	1,08	1,12	1,18	1,24	1,37
60	–	1,00	1,04	1,10	1,12	1,29

При расчете сооружений необходимо также учитывать пульсации скорости ветра. Эти пульсации называются *порывами* и обычно определяются умножением осредненной скорости, о которой говорилось выше, на *коэффициент порывистости*. Измерения показывают, что коэффициент порывистости находится в зависимости от достаточно большого интервала осреднения скорости ветра и сравнительно небольшого интервала времени осреднения максимальной скорости ветра в порыве. Так как время осреднения зависит от максимальной осредненной скорости („наискорейшей мили ветра"), коэффициент порывистости может рассматриваться как функция этой величины, а также интервала осреднения скорости в порыве.

В табл. 3.2 приведены значения коэффициента порывистости, характерные для ветров с годовыми максимумами средней скорости 30 и 60 м/с, отвечающих длительности осреднения 60 и 30 с соответственно при различных небольших интервалах осреднения максимальной скорости ветра в порыве.

Как видно, коэффициент порывистости изменяется от 1,0 до 1,4 в зависимости от годового максимума средней скорости и интервала осреднения скорости ветра в порыве. Однако не все интервалы существенны при определении ветровых нагрузок на сооружения. Действительно, порывы с длительностью, меньшей, чем время, необходимое для того, чтобы сооружение успело отреагировать на воздействия, имеют очень малое влияние и могут не учитываться. Так, если небольшой плавучий знак реагирует на порывы ветра длительностью не менее 1 с, то при годовом максимуме средней скорости 60 м/с по табл. 3.2 интерполированием получим соответствующее значение коэффициента порывистости, близкое к 1,3. Аналогично для большого здания, реагирующего на порывы длительностью от 10 с и больше, при средней скорости ветра 60 м/с получим коэффициент порывистости, равный 1,10. Морские гидротехнические сооружения реагируют на периоды, которые находятся между этими двумя пределами, и коэффициент порывистости для них приблизительно равен 1,2, т. е. при средней скорости 60 м/с расчетное значение скорости ветра получается равным $1,2 \cdot 60 = 72$ м/с.

3.2. Ветровые нагрузки

Ветровые нагрузки, действующие на морское гидротехническое сооружение, складываются из ветровых нагрузок, приходящихся на отдельные его части. Для каждой части сооружения, т. е. элементов

опорного основания, резервуаров, жилого блока, ветровая нагрузка обусловлена вязким трением потока воздуха при обтекании преграды и разностью давлений на наветренной и подветренной сторонах. Сила, действующая на преграду, может быть определена по экспериментально установленной зависимости

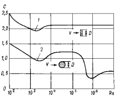


Рис. 3.3. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса [48].

1 – длинная балка прямоугольного сечения;
2 – длинный круговой цилиндр.

$$F = 0{,}5\rho C A v^2, \qquad (3.2)$$

где ρ – плотность воздуха; A – площадь парусности; v – скорость ветра; C – безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы преграды и кинематического коэффициента вязкости воздуха μ (числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho v D/\mu$, где D – характерный размер преграды).

Так как плотность и вязкость воздуха в приводном слое мало изменяются при обычных вариациях атмосферного давления и температуры, то можно принять $\rho = 1{,}226$ кг/м^3 и $\mu = 1{,}795 \cdot 10^{-5}$ Па·с, что соответствует стандартным условиям, т. е. температуре 15,56° С и давлению 1013 гПа. Подставляя эти значения в выражение (3.2), можно получить формулу для ветровой нагрузки (в килоньютонах)

$$F = 0{,}539 \cdot 10^{-3}\, C A v^2, \qquad (3.3)$$

в которой площадь принимается в квадратных метрах, а скорость в метрах на секунду. Число Рейнольдса, с которым связано C, может быть найдено по формуле $\mathrm{Re} = 0{,}69 \cdot 10^5\, vD$, причем размер D принимается в метрах.

На рис. 3.3 представлена зависимость коэффициента сопротивления C от числа Рейнольдса для двух типов длинных преград – кругового цилиндра длиной L и диаметром D и длинной тонкой такой же длины балки прямоугольного сечения и шириной D, установленной нормально к ветру. В этих случаях значение ветровой нагрузки находится по формуле (3.3) при $A = DL$, а по направлению оно совпадает с ветром.

Обычно расчетные параметры ветра и размеры преград таковы, что число Рейнольдса имеет значения от 10^6 и выше. Поэтому в инженерных расчетах коэффициент C можно полагать неизменным и равным 2,1 для длинной тонкой прямоугольной преграды и 0,6 для кругового цилиндра.

Для преград, имеющих конечную длину, значения коэффициентов сопротивления обычно меньше указанных здесь, так как обтекание концов снижает ветровую нагрузку.

В практических расчетах для различного вида преград принимаются следующие значения коэффициента сопротивления C [34]:

Преграда	C
Балка прямоугольного сечения	1,5
Круговой цилиндр	0,5
Стена жилого блока	1,5
Выступающие части платформы	1,0

Выше рассматривалось ветровое воздействие по нормали к поверхности преграды. Если преграда наклонена по отношению к направлению ветра, то ветровая нагрузка на нее действует нормально к поверхности, а ее значение может быть приближенно подсчитано по формуле (3.2), в которую вместо скорости v следует подставить составляющую этой скорости, нормальную к поверхности преграды. Так, если направление ветра и нормаль к поверхности преграды составляют угол α (рис. 3.4), то составляющая скорости ветра, нормальная к преграде, равна $v \cos \alpha$, и в этом случае

$$F = 0{,}5\,\rho C A v^2 \cos^2 \alpha, \tag{3.4 а}$$

где A – площадь парусности преграды, соответствующая нормальной составляющей скорости ветра. Для кругового цилиндра диаметром D и для плиты шириной D, имеющих длину L, площадь парусности $A = LD$.

Можно определить ветровую нагрузку на наклоненную преграду иначе: в формулу (3.2) подставляется проекция площади преграды на плоскость, нормальную к направлению ветра, ($A \cos \alpha$) и полная скорость ветра, т. е.

$$F = 0{,}5\,\rho C A v^2 \cos \alpha. \tag{3.4 б}$$

Такая оценка ветровой нагрузки является более осторожной, поскольку дает большее значение, чем найденное по (3.4 а).

Нагрузки, определенные по выражениям (3.4 а) или (3.4 б) для каждого отдельного элемента, могут быть разложены на горизонтальную (вдоль оси x) и вертикальную (вдоль оси y) составляющие, суммированием которых далее находятся горизонтальная F_x^Σ и вертикальная F_y^Σ составляющие ветровой нагрузки на сооружение в целом. Для определения точки приложения равнодействующей ветровой нагрузки сначала надо *найти моменты относительно произвольно выбранной точки от* составляющих нагрузок, действующих на отдельные элементы, полагая, что эти составляющие распределены равномерно по длине соответствующих элементов. Суммированием моментов от составляющих нагрузок, действующих на все отдельные элементы, определяются моменты M_1^Σ и M_2^Σ соответственно от горизонтальной и вертикальной составляющих равнодействующей ветровой нагрузки *на сооружение.* Горизонтальное и вертикальное расстояния от произвольно выбранной точки, относительно которой определялись моменты до точки приложения *составляющих F_x^Σ и F_y^Σ равно*действующей ветровой нагрузки, находятся из выражений

Рис. 3.4. Ветровая нагрузка на наклонный элемент.

$$dx = \frac{M_2^\Sigma}{F_y^\Sigma}\,; \quad dy = \frac{M_1^\Sigma}{F_x^\Sigma}. \tag{3.5}$$

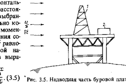


Рис. 3.5. Надводная часть буровой платформы.
1 – буровая вышка; 2 – жилой блок.

Пример 3.2–1. Определим горизонтальную ветровую нагрузку на буровую платформу (рис. 3.5) при скорости ветра 72 м/с. Суммарная площадь парусности элементов платформы и буровой вышки с наветренной стороны равна 65 м^2, а сбоку 37,5 м^2, площадь парусности жилого блока с наветренной стороны 20 м^2.

Общая обдуваемая площадь платформы и вышки с учетом всех четырех сторон $A = 2 \cdot 65 + 2 \cdot 37{,}5 = 205$ м^2.

По формуле (3.3) при $C = 1$ найдем, что горизонтальная ветровая нагрузка $F = 572{,}8$ кН.

Площадь парусности жилого блока равна 20 м^2, т. е. при $C = 1{,}5$ получим $F = 83{,}8$ кН.

Общая горизонтальная ветровая нагрузка $F = 572{,}8 + 83{,}8 = 656{,}6$ кН.

Такие расчеты дают несколько завышенное значение ветровой нагрузки, поскольку нагрузки на наклонные элементы считаются горизонтальными, тогда как в действительности они нормальны к поверхности элементов.

Пример 3.2–2. Обратимся еще раз к схеме сооружения, представленной на рис. 3.5, и определим горизонтальную и вертикальную составляющие ветровой нагрузки на раскос фермы, показанный на рис. 3.6. Элемент имеет длину 10 м, диаметр 0,6 м и наклонен на 60° по отношению к направлению распространения ветра.

Использовав формулу (3.4 а), получим (при $C = 0{,}5$ и $\alpha = 30°$) $F = 6{,}29$ кН, причем горизонтальная и вертикальная составляющие этой нагрузки $F_x = F \cos \alpha = 5{,}44$ кН; $F_y = F \sin \alpha = 3{,}15$ кН. Использовав второй из описанных выше способов [формулу (3.4 б)], получим $F = 7{,}25$ кН и $F_x = 6{,}29$ кН; $F_y = 3{,}62$ кН.

Помимо горизонтальной и вертикальной составляющих ветровой нагрузки, действующей на элемент, можно определить моменты этих сил относительно какой-либо фиксированной точки, например, относительно нижнего конца элемента. Обе составляющие приложены посередине длины элемента, таким образом момент горизонтальной составляющей нагрузки, определенной по формуле (3.4 а), равен $M_1 = 5{,}44\,(10 \sin 60°) = 47{,}1$ кН·м, а момент от вертикальной

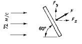


Рис. 3.6. Ветровая нагрузка на раскос фермы.

составляющей $M_2 = 3{,}15(10\cos 60^\circ) = 15{,}75$ кН·м, при этом оба момента действуют по ходу часовой стрелки.

3.3. Морские волны

Под морскими волнами обычно понимается движение по поверхности моря в нерегулярной последовательности холмов и ложбин. Они связаны в первую очередь с воздействием ветра на свободную поверхность воды и поэтому достигают наибольших размеров в районе эксплуатации сооружения в то время, когда там создаются штормовые условия.

В инженерной практике для расчета воздействия волн на сооружение обычно либо рассматривается отдельная волна, обусловленная экстремальными штормовыми условиями, либо используется статистическое представление о волнении при тех же условиях. В том и другом случаях необходимо установить связь между характеристиками волнения и скоростями, ускорениями и давлениями в воде. Для этого используется соответствующая теория волн.

Теория волн Эри

Сравнительно простая теория движения волн, известная как теория волн Дж. Б. Эри, разработана в 1842 г. Она построена на представлении о синусоидальном профиле волны и малости высоты волны H по сравнению с ее длиной λ и глубиной воды h (рис. 3.7). Строго говоря, теория Эри неприменима к волнам, для которых должно выполняться морское гидротехническое сооружение, тем не менее она широко используется для предварительных оценок и установления основных характеристик, определяющих движение воды при волнении. Она также служит основой для статистического описания волн и связанного с ними движения воды в штормовых условиях (см. главу 6).

Если оси координат x, y направлены так, как показано на рис. 3.7, то отклонение волновой поверхности от уровня спокойной воды может быть представлено в виде

$$\eta = (H/2)\cos(kx - \omega t), \tag{3.6}$$

а горизонтальная и вертикальная составляющие скорости частицы жидкости с координатами x, y, соответствующие теории Эри и уравнениям гидродинамики (см., например, [14, 27]), находятся из выражений

$$v_x = \frac{\omega H}{2}\,\frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos(kx - \omega t); \tag{3.7}$$

$$v_y = \frac{\omega H}{2}\,\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\sin(kx - \omega t), \tag{3.8}$$

где k и ω обозначают соответственно волновое число и круговую частоту волнения, связанные с длиной волны λ и периодом T (интервалом

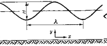


Рис. 3.7. Обозначения параметров волны.

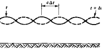


Рис. 3.8. Распространение волны.

времени между прохождением двух смежных вершин волн через фиксированную вертикаль) следующим образом:

$$k = 2\pi/\lambda; \quad \omega = 2\pi/T. \tag{3.9}$$

Из теории Эри следует, что эти величины связаны между собой выражением

$$\omega^2 = gk\,\operatorname{th} kh, \tag{3.10}$$

где g – ускорение свободного падения.

Нетрудно убедиться в том, что величины, связанные с $(kx - \omega t)$ в приведенных выше зависимостях, не изменяется, если в момент времени $t + \Delta t$ переместиться по направлению движения волны на расстояние $\Delta x = (\omega/k)\Delta t$, т. е. $kx - \omega t = k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t)$. Отсюда ясно, что отклонение взволнованной поверхности, описываемое выражением (3.6), представляет собой фиксированный профиль волны, перемещающийся вправо на рис. 3.8 с постоянной скоростью

$$c = \omega/k = \lambda/T. \tag{3.11}$$

Подставляя сюда выражение (3.10), получаем формулу для скорости распространения волн Эри

$$c = \left(\frac{g}{k}\operatorname{th} kh\right)^{1/2}. \tag{3.12}$$

Для волн малой высоты, описываемых теорией Эри, горизонтальная и вертикальная составляющие ускорения движения частиц жидкости с координатами x, y могут быть определены приближенно как $a_x = \partial v_x/\partial t$ и $a_y = \partial v_y/\partial t$, соответственно. Используя выражения (3.7) и (3.8), получаем

$$a_x = \frac{\omega^2 H}{2}\,\frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh}\sin(kx - \omega t); \tag{3.13}$$

$$a_y = -\frac{\omega^2 H}{2}\,\frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh}\cos(kx - \omega t). \tag{3.14}$$

Избыточное давление p (разность между действующим и атмосферным давлениями) в точке с координатами x, y в момент времени t,

Таблица 3.3. **Аппроксимации гиперболических функций**

Функция	Определение	Упрощенные формулы	
		при больших значениях a	при малых значениях a
sh a	$\frac{e^a - e^{-a}}{2}$	$0{,}5e^a$	a
ch a	$\frac{e^a + e^{-a}}{2}$	$0{,}5e^a$	1
th a	$\frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$	1	a

которое является суммой гидродинамического давления, связанного с отклонением волновой поверхности от уровня спокойной воды и гидростатического, определяется согласно теории Эри выражением

$$p = \rho g \frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} kh} \cos(kx - \omega t) + \rho g (h - y), \qquad (3.15)$$

в котором ρ – плотность воды.

В приведенных выше зависимостях можно сделать некоторые упрощения для предельных случаев – относительно глубокой (большие значения kh) и мелкой (малые значения kh) акваторий. Эти упрощения основаны на аппроксимации гиперболических функций, как показано в табл. 3.3.

Для глубоких акваторий, например, при $kh > \pi$ или $h/\lambda > 0{,}5$, получим упрощенное выражение для круговой частоты волнения $\omega^2 = gk$ и составляющих скорости движения частиц жидкости

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \left(\frac{\omega H}{2}\right) e^{ky'} \cos(kx - \omega t); \\ v_y &= \left(\frac{\omega H}{2}\right) e^{ky'} \sin(kx - \omega t), \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

где $y' = y - h$.

Для мелких акваторий, например, при $kh < \pi/10$ или $h/\lambda < 1/20$, получим $\omega^2 = ghk^2$ и

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \left(\frac{\omega H}{2kh}\right) \cos(kx - \omega t); \\ v_y &= \left(\frac{\omega H}{2h}\right) y \sin(kx - \omega t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

Подобные выражения могут быть получены для составляющих ускорения частиц жидкости и давления.

Таблица 3.4. **Результаты итерационного процесса**

Принятое k, м$^{-1}$	kh	th kh	Вычисленное k, м$^{-1}$
0,1117	1,675	0,9322	0,1197
0,1197	1,796	0,9463	0,1181
0,1181	1,771	0,9436	0,1184
0,1184	1,776	0,9426	0,1185

Пример 3.3–1. Пусть на акватории глубиной 15 м распространяется волна высотой 1,2 м и периодом 6 с. Определим волновое число, скорость волны и изменение горизонтальной составляющей скорости частиц жидкости на разных глубинах под гребнем волны.

Волновое число определим из выражения (3.10). Круговая частота $\omega = 2\pi/T = 1{,}047$ с$^{-1}$, а выражение (3.10) можно представить в виде $k = \omega^2/(g \operatorname{th} kh)$. Решение этого уравнения может быть получено итерационным путем. В качестве первого приближения примем th kh = 1 и получим по последней формуле $k = 0{,}1117$ м$^{-1}$. При h = 15 м будем иметь th kh = 0,9322. Подставляя эти значения в правую часть равенства, получаем значение k во втором приближении, т. е. $k = 0{,}1197$. Продолжая итерационный процесс, можно добиться совпадения значений k в левой и правой частях равенства с приемлемой точностью. Результаты вычислений сведены в табл. 3.4, в итоге которых находим $k = 0{,}1185$. Соответствующая этому значению длина волны $\lambda = 2\pi/k = 53$ м. Далее по формуле (3.12) находим скорость распространения волны $c = 8{,}83$ м/с. И, наконец, можно найти горизонтальные компоненты скорости частиц жидкости на различных глубинах под гребнем волны с помощью выражения (3.7), положив в нем $kx - \omega t = 0$, т. е. $v_x = 0{,}229 \operatorname{ch} ky$. Полагая $ky = 0{,}1185\,(15 + 0{,}6) = 1{,}849$, найдем максимальное значение скорости (на гребне волны); $v_{x\,\max} = 0{,}746$ м/с. У дна, т. е. при $ky = 0$, получим $v_x = 0{,}229$ м/с. Промежуточные значения скорости находятся из полученного выше выражения. Их зависимость от глубины приведена на рис. 3.9.

Рис. 3.9. Изменение скорости частиц жидкости под гребнем волны по глубине.

1 – дно моря; 2 – гребень волны.

Теория волн Стокса

Теория волн конечной амплитуды была развита в 1847 г. Дж. Г. Стоксом. Основная идея примененного Стоксом метода состоит в разложении уравнения волновой поверхности в ряд и определении коэффициентов разложения из условий, удовлетворяющих соответствующим уравнениям гидродинамики для волн конечной амплитуды.

Стокс выполнил исследования, оставляя в уравнениях три члена разложения по крутизне (H/λ) (теория третьего порядка точности). Детальный анализ полученных решений приведен в работах [39, 45]. Решение, в котором оставлены пять членов разложения, приведено в работе [40]. Это решение известное, как теория волн Стокса пятого порядка, широко используется в инженерных расчетах для волн конечной амплитуды. Так как сходимость полученных рядов замедляется с уменьшением значения глубины воды, применение этой теории имеет смысл при относительных глубинах h/λ, больших, чем 0,1. Это условие обычно выполняется при расчете стационарных буровых платформ на воздействие штормовых волн.

Формулы теории волн Стокса пятого порядка приводятся здесь в тех же обозначениях, что и формулы теории волн Эри. Изложение следует в основном работе [40].

В соответствии с теорией Стокса пятого порядка при распространении волны высотой H, с волновым числом k и круговой частотой ω в направлении положительных x, отклонение η поверхности жидкости от уровня спокойной воды может быть представлено в виде

$$\eta = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{5} F_n \cos n(kx - \omega t), \tag{3.18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= a; \\ F_2 &= a^2 F_{22} + a^4 F_{24}; \\ F_3 &= a^3 F_{33} + a^5 F_{35}; \\ F_4 &= a^4 F_{44}; \\ F_5 &= a^5 F_{55}, \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

причем параметры формы волны F_{22}, F_{24}, ..., зависящие от kh, и параметр высоты волны a связаны между собой соотношением

$$kH = 2[a + a^3 F_{33} + a^5 (F_{35} + F_{55})]. \tag{3.20}$$

Горизонтальная v_x и вертикальная v_y составляющие скорости частиц жидкости с координатами x, y (начало координат на дне), в момент времени t обусловленные распространением поверхностной волны по акватории глубиной h, могут быть получены из выражений

$$v_x = \frac{\omega}{k} \sum_{n=1}^{5} G_n \frac{\operatorname{ch} nky}{\operatorname{sh} nkh} \cos n(kx - \omega t); \tag{3.21}$$

$$v_y = \frac{\omega}{k} \sum_{n=1}^{5} G_n \frac{\operatorname{sh} nky}{\operatorname{sh} nkh} \sin n(kx - \omega t), \tag{3.22}$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= a G_{11} + a^3 G_{13} + a^5 G_{15}; \\ G_2 &= 2(a^2 G_{22} + a^4 G_{24}); \\ G_3 &= 3(a^3 G_{33} + a^5 G_{35}); \\ G_4 &= 4a^4 G_{44}; \\ G_5 &= 5a^5 G_{55}. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Здесь G_{11}, G_{13}, ... — параметры скорости волны, зависящие от kh.

Выражения для параметров F_{22}, F_{24}, G_{11} и другие приведены в работе [40], но в иных обозначениях ($F_{22} = B_{22}$, $F_{24} = B_{24}$, ...; $G_{11} = A_{11}$ sh kh; $G_{24} = A_{24}$ sh $2kh$, ...), там же даны результаты вычислений при различных значениях $h/\lambda = kh/2\pi$. Приближенные значения параметров показаны в табл. 3.5 и 3.6.

Соотношение между круговой частотой и волновым числом имеет вид

$$\omega^2 = gk(1 + a^2 C_1 + a^4 C_2) \operatorname{th} kh, \tag{3.24}$$

где C_1 и C_2 — параметры частоты волны. Значения этих параметров при различных h/λ показаны в табл. 3.7.

Скорость распространения волны c, которая по теории Эри определялась как $c = \omega/k$, в теории волн Стокса пятого порядка находится из выражения

$$c = \left[\frac{g}{k}(1 + a^2 C_1 + a^4 C_2) \operatorname{th} kh\right]^{1/2}. \tag{3.25}$$

После определения выражений для составляющих v_x и v_y скорости частицы жидкости могут быть найдены составляющие ускорения

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + u\frac{\partial v_x}{\partial x} + v\frac{\partial v_x}{\partial y};$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + u\frac{\partial v_y}{\partial x} + v\frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Введем обозначения коэффициентов составляющих скорости частиц воды в формулах (3.21) и (3.22).

$$\left.\begin{aligned} U_n &= G_n \frac{\operatorname{ch} nky}{\operatorname{sh} nkh}; \\ V_n &= G_n \frac{\operatorname{sh} nky}{\operatorname{sh} nkh}. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Таблица 3.5. **Значения параметров профиля волны [40]**

h/λ	F_{22}	F_{24}	F_{33}	F_{35}	F_{44}	F_{55}
0,10	3,892	–28,61	13,09	–138,6	44,99	163,8
0,15	1,539	1,344	2,381	6,935	4,147	7,935
0,20	0,927	1,398	0,996	3,679	1,259	1,734
0,25	0,699	1,064	0,630	2,244	0,676	0,797
0,30	0,599	0,893	0,495	1,685	0,484	0,525
0,35	0,551	0,804	0,435	1,438	0,407	0,420
0,40	0,527	0,759	0,410	1,330	0,371	0,373
0,50	0,507	0,722	0,384	1,230	0,344	0,339
0,60	0,502	0,712	0,377	1,205	0,337	0,329

Таблица 3.6. **Значения параметров скорости волны [40]**

h/λ	G_{11}	G_{13}	G_{15}	G_{22}	G_{24}
0,10	1,000	–7,394	–12,73	2,996	–48,14
0,15	1,000	–2,320	–4,864	0,860	–0,907
0,20	1,000	–1,263	–2,266	0,326	0,680
0,25	1,000	–0,911	–1,415	0,154	0,673
0,30	1,000	–0,765	1,077	0,076	0,601
0,35	1,000	–0,696	–0,925	0,038	0,556
0,40	1,000	–0,662	–0,850	0,020	0,528
0,50	1,000	–0,635	–0,790	0,006	0,503
0,60	1,000	–0,628	–0,777	0,002	0,502

h/λ	G_{33}	G_{35}	G_{44}	G_{55}
0,10	5,942	–121,7	7,671	0,892
0,15	0,310	2,843	–0,167	–0,257
0,20	–0,017	1,093	–0,044	0,006
0,25	–0,030	0,440	–0,005	0,005
0,30	–0,020	0,231	0,002	0,001
0,35	–0,012	0,152	0,002	0,000
0,40	–0,006	0,117	0,001	0,000
0,50	–0,002	0,092	0,000	0,000
0,60	–0,001	0,086	0,000	0,000

Таблица 3.7. **Значения параметров частоты волны и давления [40]**

h/λ	C_1	C_2	C_3	C_4
0,10	8,791	383,7	–0,310	–0,060
0,15	2,646	19,82	–0,155	0,257
0,20	1,549	5,044	–0,082	0,077
0,25	1,229	2,568	–0,043	0,028
0,30	1,107	1,833	–0,023	0,010
0,35	1,055	1,532	–0,012	0,004
0,40	1,027	1,393	–0,007	0,002
0,50	1,008	1,283	–0,001	~0
0,60	1,002	1,240	–0,001	~0

После подстановки этих формул в выражения для составляющих ускорения и соответствующих тригонометрических преобразований получим

$$a_x = \frac{kc^2}{2}\sum_{n=1}^{5} R_n \sin n(kx-\omega t); \tag{3.27}$$

$$a_y = -\frac{kc^2}{2}\sum_{n=1}^{5} S_n \cos n(kx-\omega t), \tag{3.28}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= 2U_1 - U_1U_2 - U_2U_3 - V_1V_2 - V_2V_3;\\
R_2 &= 4U_2 - U_1^2 + V_1^2 - 2U_1U_3 - 2V_1V_3;\\
R_3 &= 6U_3 - 3U_1U_2 + 3V_1V_2 - 3U_1U_4 - 3V_1V_4;\\
R_4 &= 8U_4 - 2U_2^2 + 2V_2^2 - 4U_1U_3 + 4V_1V_3;\\
R_5 &= 10U_5 - 5U_1U_4 - 5U_2U_3 + 5V_1V_4 + 5V_2V_3
\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= -2U_1V_1;\\
S_1 &= 2V_1 - 3U_1V_2 - 3U_2V_1 - 5U_2V_3 - 5U_3V_2;\\
S_2 &= 4V_2 - 4U_1V_3 - 4U_3V_1;\\
S_3 &= 6V_3 - U_1V_2 + U_2V_1 - 5U_1V_4 - 5U_4V_1;\\
S_4 &= 8V_4 - 2U_1V_3 + 2U_3V_1 + 4U_2V_2;\\
S_5 &= 10V_5 - 3U_1V_4 + 3U_4V_1 - U_2V_3 + U_3V_2.
\end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Давление в жидкости, обусловленное отклонением взволнованной поверхности и гидростатикой, может быть определено подстановкой составляющих скорости в выражение

$$\rho = \rho\frac{\omega}{\kappa}u - \frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2) - \frac{\rho g}{k}(a^2C_3 + a^4C_4 + ky'), \tag{3.31}$$

где $y' = y - h$, а C_3 и C_4 – параметры давления, зависящие от kh или h/λ. Значения этих параметров приведены в табл. 3.8.

Пример 3.3–2. Для волны высотой $H = 10{,}7$ м и длиной 115 м, распространяющейся на акватории глубиной 23 м, определим профиль волновой поверхности и распределение горизонтальных скоростей частиц жидкости под гребнем волны, используя теорию волн Стокса пятого порядка.

Сначала определим параметр a высоты волны из уравнения (3.20), которое может быть представлено в виде $a = (kH/2) - a^3F_{33} - a^5(F_{35} + F_{55})$ и решено методом итераций. При $h/\lambda = 0{,}20$ получим $k = 0{,}055$ м$^{-1}$ и $kH/2 = 0{,}292$, а из табл. 3.5 найдем, что $F_{33} = 0{,}996$; $F_{35} = 3{,}679$ и $F_{55} = 1{,}734$. В качестве первого приближения можно принять $a = 0{,}292$, и после нескольких итераций найдем, что $a = 0{,}267$.

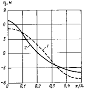


Рис. 3.10. Расчетные профили волны.

1 – по теории Эри; 2 – по теории Стокса.

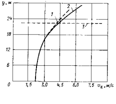


Рис. 3.11. Изменение скорости частиц жидкости под гребнем волны.

1 – по теории Эри; 2 – по теории Стокса; 3 – уровень спокойной поверхности.

Далее, подставив соответствующие значения параметров в (3.18), получим выражение отклонения взволнованной поверхности от уровня спокойной воды: $\eta = 4{,}84\cos\theta + 1{,}32\cos 2\theta + 0{,}44\cos 3\theta + 0{,}116\cos 4\theta + 0{,}0427\cos 5\theta$, где $\theta = kx - \omega t$. Максимальное и минимальное значения отклонения (соответственно у вершины при $\theta = 0$ и у подошвы волны при $\theta = \pi$) равны $\eta_{max} = 6{,}76$ м; $\eta_{min} = -3{,}90$ м.

Расчетный профиль волны, соответствующий полупериоду, показан на рис. 3.10 для момента $t = 0$; там же для сравнения показан профиль волны, полученный по теории Эри.

Теперь установим выражение горизонтальной составляющей скорости частиц жидкости. По формуле (3.24) найдем, что круговая частота волнения $\omega = 0{,}723$ с$^{-1}$. Подставив это значение в выражение (3.21) и подсчитав коэффициенты, получим

$$v_x = 3{,}145\frac{\text{ch } ky}{\text{sh } kh} + 0{,}710\frac{\text{ch } 2ky}{\text{sh } 2kh} + 0{,}0457\frac{\text{ch } 3ky}{\text{sh } 3kh} - 0{,}0118\frac{\text{ch } 4ky}{\text{sh } 4kh} + 0{,}0006\frac{\text{ch } 5ky}{\text{sh } 5kh}.$$

На вершине волны, т. е. при $y = 29{,}7$ м, найдем $v_{x\,max} = 6{,}7$ м/с. Эпюра скорости частиц воды под гребнем волны показана на рис. 3.11, там же для сравнения дана эпюра, полученная по теории Эри.

Теория кноидальных волн

Волновая теория Стокса дает удовлетворительные результаты при относительных глубинах акватории h/λ, больших 0,1. Для менее глубоких акваторий удовлетворительные результаты получаются по теории кноидальных волн. Она была предложена в 1895 г. Кортевегом и де Фризом, а затем развита рядом других исследователей. Результаты исследований обобщены и представлены в удобном для практического пользования виде в работе [45].

Расчетные зависимости теории кноидальных волн выражены через эллиптические функции и интегралы (их таблицы приведены, в частности, в работе [29]*). Основным допущением при построении первого приближения теории является предположение об относительной малости отношения высоты волны к глубине акватории и возможности пренебрежения квадратом этого отношения. В теории Эри, в отличие от рассматриваемой, считались малыми и первые степени этого отношения.

Изложение теории кноидальных волн здесь следует в основном работе [45]. Принятые обозначения такие же, как и при описании теорий Эри и Стокса.

Кноидальные волны являются периодическими, их профиль описывается с помощью волнового числа k и круговой частоты ω выражением

$$\eta = \eta_{min} + H\,\text{cn}^2(kx - \omega t, m), \tag{3.32}$$

где η – отклонение волновой поверхности от уровня спокойной воды в точке с координатой x и в момент времени t; η_{min} – отклонение, соответствующее подошве волны; H – высота волны; cn – эллиптическая функция Якоби с модулем m $(0 \leqslant m \leqslant 1)$.

Модуль m связан с высотой волны H, длиной волны λ и глубиной воды h соотношением

$$mK^2 = \frac{3}{16}\;\frac{H\lambda^2}{h^3}, \tag{3.33}$$

где K – параметр (полный эллиптический интеграл), который сам зависит от m. Значения m, K и $H\lambda^2/h^3$ приведены в табл. 3.8.

Волновое число k, круговая частота ω связаны с длиной волны λ и ее периодом T соотношениями

$$k = (2K)/\lambda; \quad \omega = (2K)/T. \tag{3.34}$$

Кроме того, частота связана с волновым числом выражением

$$\omega^2 = ghk^2\left[1 + \frac{H}{mh}\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K}\right)\right]^2, \tag{3.35}$$

где g – ускорение свободного падения; E – параметр (полный эллиптический интеграл второго рода), зависящий от модуля m. Значения

* Можно рекомендовать также „Справочник по специальным функциям". Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Перевод с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. М., Наука, 1979, 830 с.

Таблица 3.8. Параметры, используемые в теории кноидальных волн

m	$H\lambda^2/h^3$	K	E
0	0	1,571	1,571
0,100	1,38	1,612	1,531
0,200	2,94	1,660	1,489
0,300	4,71	1,714	1,445
0,400	6,74	1,778	1,399
0,500	9,16	1,854	1,351
0,600	12,17	1,950	1,298
0,700	16,09	2,075	1,242
0,800	21,74	2,257	1,178
0,900	31,90	2,578	1,105
0,950	42,85	2,908	1,060
0,990	72,13	3,696	1,016
1,000	∞	∞	1,000

E также приведены в табл. 3.8. Если длина волны задана, то волновое число может быть найдено по первой из формул (3.34), а частота и период волнения – по (3.34) и (3.35).

Величина η_{min}, входящая в (3.32), выражается через высоту волны

$$\frac{\eta_{min}}{H} = \frac{K(1-m)-E}{mk}. \tag{3.36}$$

Так как K и E зависят только от m, и это отношение также может быть выражено только через этот модуль.

Остается определить отклонение волновой поверхности η, связанное с приведенными выше величинами. Из выражения (3.32) имеем

$$\frac{\eta-\eta_{min}}{H} = \mathrm{cn}^2(\theta, m), \tag{3.37}$$

где $\theta = kx - \omega t$. Численные значения этого отношения, соответствующие различным значениям θ и m, даны в табл. 3.9. При отсутствии более

Таблица 3.9. Приближенные значения $(\eta - \eta_{min})/H$

θ	$m=0$	$m=0,2$	$m=0,4$	$m=0,6$	$m=0,8$	$m=1,0$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960
0,4	0,848	0,850	0,852	0,852	0,854	0,856
0,6	0.681	0,687	0,694	0.699	0,706	0,712
0,8	0,487	0,500	0,516	0,530	0,545	0,560
1,0	0,292	0,317	0,342	0,368	0,394	0,420
1,2	0,131	0,162	0,194	0,229	0,266	0,305
1,4	0,029	0,053	0,085	0,123	0,166	0,216
1.6	0,001	0,003	0,019	0,049	0,094	0,151
1,8	0,052	0,016	0,000	0,009	0,044	0,104
2,0	0,175	0,062	0,028	0,001	0,013	0,071

подробных таблиц эллиптических функций и интегралов величины могут быть определены по табл. 3.8 и 3.9 с помощью линейной интерполяции.

Величина, значение которой приведено в табл. 3.9, изменяется, за исключением случая $m=1$, периодически с периодом, равным $2K$. Как видно, табличные значения даны для полупериода. Если значение θ оказывается вне рассмотренного диапазона, то вместо θ следует принять значение $2K - \theta$ и по нему с помощью табл. 3.9 определить величину $(\eta - \eta_{min})/H$.

Для относительно мелких акваторий, к которым теория кноидальных волн применима в большей степени, характерно по существу горизонтальное направление скоростей частиц жидкости, причем

$$v_x = (g/h)^{1/2}\eta. \tag{3.38}$$

В условиях мелководья горизонтальное ускорение частиц жидкости может быть определено следующим образом:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

С использованием соответствующих преобразований для производных от эллиптических функций может быть получена следующая формула:

$$a_x = \pm\, 2kH\,(c - v_x)\,(g/h)^{1/2}A, \tag{3.39}$$

в которой $c = \omega/k$ означает скорость распространения волны, а

$$A = \left[\frac{\eta-\eta_{min}}{H}\left(1-\frac{\eta-\eta_{min}}{H}\right)\left(1-m+m\frac{\eta-\eta_{min}}{H}\right)\right]^{1/2}. \tag{3.40}$$

Положительное значение a_x соответствует $0 \leqslant \theta \leqslant K$, а отрицательное – случаю $K < \theta \leqslant 2K$.

Давление на уровне y от дна, обусловленное волнением и гидростатикой, находится из выражения

$$p = \rho g\,(h + \eta - y), \tag{3.41}$$

где ρ – плотность воды.

При $m=1$ правомерно равенство $\mathrm{cn}(\theta) = \mathrm{sch}\ \theta$, при этом профиль волны становится непериодическим и оказывается полностью над уровнем спокойной воды. Волна, соответствующая этому предельному случаю, называется *одиночной*.

Пример 3.3–3. Рассмотрим волну высотой 3 м и длиной 130 м, распространяющуюся на акватории глубиной 12 м. Использовав теорию кноидальных волн, определим период, профиль и горизонтальную скорость волны на вершине и у подошвы.

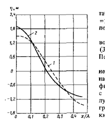


Рис. 3.12. Расчетный профиль волны.

1 – по теории Эри; *2* – по теории кноидальных волн.

Сначала найдем модуль m с помощью табл. 3.8. По условиям задачи $H\lambda^2/h^3 = 29{,}3$. По табл. 3.8 интерполированием получим $m = 0{,}86$; $K = 2{,}46$; $E = 1{,}13$.

Далее по формуле (3.34) получим волновое число $k = 0{,}0378\ \text{м}^{-1}$, а по (3.35) круговую частоту $\omega = 0{,}419\ \text{с}^{-1}$. Период волнения $T = 2K/\omega = 11{,}7$ с.

Профиль волны описывается уравнением (3.37), причем $H = 3$ м, а η_{min}, найденное из (3.36), равно –1,1 м. Профиль волны, построенный на рис. 3.12 с помощью табл. 3.9, сопоставлен с полученным по теории Эри. Как видно, гребень волны, построенной по теории кноидальных волн, выше, чем у волны Эри.

И наконец, по формуле (3.38) найдем значения скорости частиц жидкости на гребне и у подошвы волны: $v_{x,\,max} = 1{,}65$ м/с; $v_{x,\,min} = -1{,}03$ м/с. Эти значения могут быть сопоставлены с соответствующими значениями по теории Эри, а именно 1,50 м/с и –1,50 м/с.

Области применимости волновых теорий

Теория волн Эри, применяемая обычно в предварительных расчетах и даже при таких высотах волн, при которых возможны повреждения конструкции, основана на положении о малости высоты волн по сравнению с длиной волны и с глубиной акватории. Для более точных расчетов следует использовать теорию волн Стокса при условии, что длина волны менее 0,1 глубины акватории. Для более длинных волн обычно рекомендуется теория кноидальных волн.

Естественно возникает вопрос о предельных значениях отношений высоты волны к ее длине, а также длины волны к глубине акватории, при которых вполне приемлемые по точности результаты могут быть получены по самой простой теории Эри. Приведенные выше примеры показывают, что основной особенностью более точных теорий волн – Стокса и кноидальной – является предсказываемая ими более высокая отметка гребня волны по сравнению с теорией Эри. Это обстоятельство подсказывает простой способ определения границы применимости теории Эри – она может быть использована там, где вычисленная с ее помощью высота гребня волны отличается от полученной по более точным теориям на величину, находящуюся в пределах заданной относительной погрешности. Этим способом установлена область значений отношения высоты и длины волны, при которых теория Эри позволяет получить достаточно точные результаты.

Рис. 3.13. Диаграмма применимости волновой теории Эри (*1*) с погрешностью до 10% по сравнению с более точными теориями Стокса (*2*) и кноидальных волн (*3*).

Рис. 3.13 показывает разграничение областей применения волновых теорий при произвольно принятой погрешности 10 % по значению высоты гребня волны. При разграничении теорий Эри и Стокса в формуле для отклонения волновой поверхности, отвечающей теории Стокса, оставлены только два первых члена ряда, т. е. учтена первая поправка к теории Эри. Разграничение теорий Эри и кноидальной основано на результатах, полученных по изложенной выше теории кноидальных волн. Разграничение теорий Стокса и кноидальной проведено на основе общепринятого представления о том, что теория кноидальных волн может быть рекомендована при отношении глубины акватории к длине волны, меньшем 0,1, и за исключением случаев, когда при тех же условиях может быть использована теория Эри.

Диаграмма на рис. 3.13 может быть использована не только для установления области применимости той или иной волновой теории, но также и для оценки погрешности результатов, получаемых по теории Эри. Например, при отношении глубины акватории к длине волны, равном 0,5, граница между областями применения теорий Эри и Стокса соответствует отношению высоты волны к ее длине, равном 0,063. Этому соотношению отвечает погрешность 10 %. Если же отношение высоты волны к ее длине равно, допустим, 0,056, то погрешность результатов, получаемых по теории Эри, окажется приблизительно равной $10 \cdot 0{,}056/0{,}063 = 8{,}9$ %.

3.4. Волновые нагрузки на вертикальные колонны

Волновые нагрузки на неподвижную вертикальную цилиндрическую колонну впервые исследованы Морисоном и др. [31] в предположении о малости диаметра колонны по сравнению с длиной волны (при отношении указанных величин порядка 0,1 и менее), позволяющем пренебречь искажением формы волны при взаимодействии с колонной. Если обозначить f волновую нагрузку на единицу длины колонны, имеющей диаметр D, то в соответствии с *формулой Морисона*, предложенной в упомянутой работе и получившей широкое распространение в инженерных расчетах,

$$f = 0{,}5\rho C_{ск} D |v_x| v_x + \rho C_{ин} (\pi D^2/4) a_x, \tag{3.42}$$

где ρ – плотность воды; $C_{ск}$ и $C_{ин}$ – коэффициенты; v_x и a_x – горизонтальные скорость и ускорение частиц воды, обусловленные волнением*.

* Аналогичная формула, полученная Д. Д. Лаппо, применяется в отечественной практике с 1948–1949 гг.

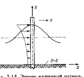


Рис. 3.14. Эпюра волновой нагрузки на вертикальную колонну.

Первое слагаемое в правой части формулы (3.42), называемое *скоростным* или лобовым *сопротивлением* и, как видно, пропорциональное квадрату скорости воды, включает модуль скорости, поскольку знак этой нагрузки совпадает со знаком скорости движения частиц воды. Второе слагаемое, именуется *инерционным сопротивлением* и, как видно, пропорционально ускорению частиц воды. Коэффициенты $C_{ск}$ и $C_{ин}$ называются соответственно коэффициентами *скоростного и инерционного сопротивлений*.

Значения коэффициентов скоростного и инерционного сопротивлений зависят от безразмерных параметров, связанных в свою очередь с максимальной скоростью частиц воды $v_{x,\,\max}$ и периодом волнения T:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_{x,\,\max} D}{\mu}; \quad N_к = \frac{v_{x,\,\max} T}{D}, \tag{3.43}$$

где ρ и μ обозначают плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости. Первый из этих параметров, называемый числом Рейнольдса, уже упоминался в связи с ветровыми нагрузками и характеризует влияние вязкости жидкости. Второй параметр – число Кьюлагена–Карпентера – характеризует эффект, связанный с периодичностью волнения. К сожалению, количество экспериментальных данных, устанавливающих зависимостей коэффициентов сопротивления от указанных безразмерных чисел, весьма *ограничено, и поэтому в инженерной практике* оба коэффициента полагают для простоты расчетов постоянными. Значение коэффициента скоростного сопротивления $C_{ск}$ принимают в пределах 0,6–1,0, а значение коэффициента инерционного сопротивления $C_{ин}$ – в пределах 1,5–2,0 [34].

По значениям скорости v_x и ускорения a_x в выражении (3.42), определенным по соответствующей волновой теории, а также значениям коэффициентов скоростного и инерционного сопротивлений можно получить зависимости, определяющие распределение волновой нагрузки по длине колонны в любой момент волнового цикла. Так как скорости и ускорения частиц жидкости, обусловленные волнением, в общем случае убывают с глубиной, распределение волновой нагрузки вдоль колонны имеет вид, изображенный на рис. 3.14.

Равнодействующая волновой нагрузки, действующей на колонну на участке от дна ($y = 0$) до некоторого уровня y, равна

$$F = \int_0^y f(y)\,dy. \tag{3.44}$$

Аналогично момент этой нагрузки относительно низа колонны ($y = 0$) равен

$$M = \int_0^y y f(y)\,dy, \tag{3.45}$$

а плечо равнодействующей относительно низа колонны находится как $b = M/F$.

Нагрузки от волн Эри

Ограничимся рассмотрением волн малой амплитуды, имеющих высоту H, частоту ω и волновое число k, которые распространяются на акватории глубиной h. Тогда при использовании расчетных зависимостей теории Эри, изложенных в параграфе 3.3, при совмещении оси y с осью колонны выражение (3.44) может быть представлено в виде

$$F = F_{ск} + F_{ин}, \tag{3.46}$$

где $F_{ск}$ и $F_{ин}$ – нагрузки, связанные соответственно со скоростным и инерционным сопротивлением и вычисляемые для колонн постоянного диаметра по формулам

$$F_{ск} = \frac{\rho C_{ск} D}{32k} (\omega H)^2 \left(\frac{\operatorname{sh} 2ky}{\operatorname{sh}^2 kh} + \frac{2ky}{\operatorname{sh}^2 kh} \right) |\cos \omega t| \cos \omega t; \tag{3.47}$$

$$F_{ин} = -\frac{\rho C_{ин}}{2k} \frac{\pi D^2}{4} \omega^2 H \frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh} \sin \omega t. \tag{3.48}$$

Аналогично может быть конкретизировано выражение (3.45) для момента волновой нагрузки

$$M = M_{ск} + M_{ин}, \tag{3.49}$$

где $M_{ск}$ и $M_{ин}$ обозначают соответственно моменты, связанные со скоростным и инерционным сопротивлениями, и находятся по формулам

$$M_{ск} = \frac{\rho C_{ск} D}{64k^2} (\omega H)^2 Q_1 |\cos \omega t| \cos \omega t; \tag{3.50}$$

$$M_{ин} = -\frac{\rho C_{ин}}{2k^2} \frac{\pi D^2}{4} \omega^2 H Q_2 \sin \omega t, \tag{3.51}$$

в которых

$$Q_1 = \frac{2ky \operatorname{sh} 2ky - \operatorname{ch} 2ky + 2(ky)^2 + 1}{\operatorname{sh}^2 kh}; \tag{3.52}$$

$$Q_2 = \frac{ky \operatorname{sh} ky - \operatorname{ch} ky + 1}{\operatorname{sh} kh}. \tag{3.53}$$

Из этих формул видно, что силы скоростного и инерционного сопротивления, также как и соответствующие составляющие момента волновой нагрузки, сдвинуты по фазе на 90°, т. е. когда одни из них достигают максимального значения, другие равны нулю. Равнодействующая волновой нагрузки и соответствующий ей момент подсчитываются, конечно, при подстановке $y = h + \eta$, где η – отклонение волновой поверхности у колонны от уровня спокойной воды. Значение η в любой момент ωt определяется из общего уравнения профиля волны $\eta = (H/2)\cos(kx - \omega t) = (H/2)\cos\omega t$.

Когда применение теории Эри строго обосновано, отношение η/h мало, а значит, равнодействующая волновой нагрузки на колонну и момент этой нагрузки могут быть найдены проще – подстановкой в приведенные выше формулы $y = h$. Максимальные значения этих величин находятся в результате вычислений при различных значениях ωt. Если, однако, η/h не является пренебрежимо малым, но теория Эри используется для приближенных расчетов, то более точные значения результирующей волновой нагрузки и ее момента могут быть получены при подстановке $y = h + (H/2)\cos\omega t$. Максимальные их значения определяются в результате вычислений для различных моментов ωt с учетом соответствующих изменений уровня воды по высоте колонны.

Соотношение сил скоростного и инерционного сопротивлений в формуле (3.46) может быть оценено с помощью выражений (3.47) и (3.48). Отношение максимальной силы скоростного сопротивления $F_{ск,\,max}$ и максимальной силы инерционного сопротивления $F_{ин,\,max}$ может быть представлено в виде

$$\frac{F_{ск,\,max}}{F_{ин,\,max}} = \mu \frac{H}{D}, \qquad (3.54)$$

где значение μ при $h + \eta \approx h$ находится как

$$\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{C_{ск}}{C_{ин}} \left(\frac{\operatorname{sh} 2kh}{\operatorname{sh}^2 kh} + \frac{2kh}{\operatorname{sh}^2 kh} \right).$$

Приближенные значения μ при различных $h/\lambda = kh/2\pi$ и $C_{ск}/C_{ин} = 0{,}5$ приведены в табл. 3.10. При $h/\lambda > 0{,}3$ отношение максимальных значений скоростной и инерционной составляющих волновой нагрузки меньше одной десятой отношения высоты волны к диаметру цилиндра.

Таблица 3.10. ***Значения μ в формуле (3.54)***

h/λ	kh	μ
0,05	0,314	0,51
0,10	0,628	0,25
0,30	1,885	0,10
0,50	3,142	0,08
1,00	6,283	0,08
∞	∞	0,08

Таким образом, при указанном ограничении на h/λ и относительно большом диаметре колонны (при $H/D \leqslant 1$) скоростная составляющая волновой нагрузки составит менее 10 % от инерционной составляющей и может не учитываться в приближенных расчетах.

Если ограничиться рассмотрением максимального значения равнодействующей волновой нагрузки, то погрешность от пренебрежения скоростной составляющей будет еще меньшей, поскольку скоростная и инерционные составляющие волновой нагрузки сдвинуты по фазе на 90°. Таким образом, максимальное значение равнодействующей волновой нагрузки может быть получено по приближенной формуле

$$F_{max} = \sqrt{F^2_{ин,\,max} + F^2_{ск,\,max}} = F_{ин,\,max} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu H}{D}\right)^2}, \qquad (3.55)$$

так что, если, например, $\mu H/D = 0{,}25$, то погрешность от пренебрежения скоростной составляющей нагрузки составит около 30 %.

Пример 3.4–1. Определим максимальную нагрузку и ее момент относительно основания колонны диаметром 1,22 м, обусловленные волнами высотой 10,7 м, длиной 115 м, распространяющимися по акватории *глубиной 23 м. Положим $C_{ск} = 1$ и $C_{ин} = 2$.*

Хотя теория Эри не позволяет получить в этом случае точное решение, поскольку высота волны относительно велика, ее можно использовать для приближенной оценки волновой нагрузки. Волновое число $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/115 = 0{,}055$ м$^{-1}$, а круговая частота волнения ω в соответствии с (3.10) равна $0{,}677$ с$^{-1}$. Так как отношение высоты волны к диаметру колонны значительно больше единицы, скоростной составляющей волновой нагрузки пренебречь нельзя, что следует из формул (3.54) и (3.55). Скоростная и инерционная составляющие равнодействующей волновой нагрузки на колонну (в килоньютонах), определенные по формулам (3.47) и (3.48) при $\rho = 1{,}026 \cdot 10^3$ кг/м^3, $D = 1{,}22$ м и $H = 10{,}7$ м, получают вид

$$F_{ск} = 14{,}06\,[\operatorname{sh} 2k(h + \eta) + 2k(h + \eta)]\,|\cos\omega t|\cos\omega t;$$

$$F_{ин} = -65{,}61 \operatorname{sh} k(h + \eta)\sin\omega t,$$

где $\eta = (H/2)\cos\omega t = 5{,}35\cos\omega t$.

Равнодействующая волновой нагрузки определяется как $F = F_{ск} + F_{ин}$, при этом численный анализ при различных значениях ωt показывает, что *максимальное значение нагрузка имеет при $\omega t = 6{,}0\,(345^\circ)$* и равно 223,9 кН. В этот момент времени отклонение волновой поверхности над уровнем спокойной воды около сваи составляет 5,1 м, т. е. свободная поверхность воды находится относительно дна на уровне $y = h + \eta = 28{,}1$ м.

Момент волновой нагрузки, определенный по (3.49) при указанных значениях ωt и y, равен 3991 кН·м. Таким образом, равнодействующая волновой нагрузки приложена на уровне $3991/223{,}9 = 17{,}8$ м от основания колонны.

Нагрузки от волн Стокса

При рассмотрении волн конечной амплитуды Стокса расчет волновой нагрузки с помощью выражения (3.44) становится более сложным, поскольку волновая поверхность описывается в виде суперпозиции волн различного профиля. Подставив выражение (3.21) и (3.27) для горизонтальных составляющих скорости и ускорения частиц жидкости в уравнения Морисона, получим при $x=0$, (полагая, что это сечение совпадает с колонной)

$$f=\frac{\rho C_{\text{ск}} D^2}{2k^2}\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{5-m} U_m U_n |\cos m\omega t|\cos n\omega t -$$

$$-\frac{\rho C_{\text{ин}}\pi D\omega}{8k}\sum_{n=1}^{5} R_n \sin n\omega t, \tag{3.56}$$

где коэффициенты U_n и R_n определяются по формулам (3.26) и (3.29). При этом двойное суммирование выполняется так, чтобы произведения $U_m U_n$ при $m+n>5$ не учитывались в соответствии с той точностью, которую может обеспечить теория Стокса пятого порядка. Подставив полученное выражение в (3.44), найдем волновую нагрузку $F(y)$ на колонну на уровне y от дна

$$F(y)=F_{\text{ск}}(y)+F_{\text{ин}}(y), \tag{3.57}$$

где

$$F_{\text{ск}}=\frac{\rho C_{\text{ск}} D\omega^2}{2k^3}\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{5-m} A_{mn}|\cos m\omega t|\cos n\omega t; \tag{3.58}$$

$$F_{\text{ин}}=-\frac{\rho C_{\text{ин}}\pi D^2\omega^2}{4k^2}\sum_{n=1}^{5} B_n \sin n\omega t. \tag{3.59}$$

Введя обозначение $S_n=\operatorname{sh} nkh$ и используя коэффициент составляющей скорости, определяемый по (3.26), получим

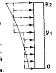
$$A_{mn\,(m\neq n)}=\frac{G_m G_n}{2S_m S_n}\;\frac{S_{m+n}V_{m+n}}{(m+n)G_{m+n}}+\frac{S_{m-n}V_{m-n}}{(m-n)G_{m-n}}; \tag{3.60}$$

$$A_{nn}=\frac{G_n^2 S_{2n}V_{2n}}{S_n^2 4nG_{2n}}+\frac{ky}{2} \tag{3.61}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
B_1&=V_1-\frac{1}{6}\,\frac{G_1G_2}{G_3}\,\frac{S_3}{S_1S_2}V_3-\frac{1}{10}\,\frac{G_2G_3}{G_5}\,\frac{S_5}{S_2S_3}V_5;\\
B_2&=V_2-\frac{1}{2}\,\frac{G_1^2}{S_1^2}ky-\frac{1}{4}\,\frac{G_1G_3}{G_4}\,\frac{S_4}{S_1S_3}V_4;\\
B_3&=V_3-\frac{3}{2}\,\frac{G_2}{S_2}V_1-\frac{3}{10}\,\frac{G_1G_4}{G_5}\,\frac{S_5}{S_1S_4}V_5;\\
B_4&=V_4-\frac{1}{2}\,\frac{G_2^2}{S_2^2}ky-\frac{G_1G_3}{G_2}\,\frac{S_2}{S_1S_3}V_2;\\
B_5&=V_5-\frac{5}{2}\,\frac{G_2G_3}{G_1}\,\frac{S_1}{S_2S_3}V_1-\frac{5}{6}\,\frac{G_1G_4}{G_3}\,\frac{S_3}{S_1S_4}V_3.
\end{aligned}\right\} \tag{3.62}$$

Для определения момента максимальной волновой нагрузки относительно основания колонны можно воспользоваться выражениями (3.45) и (3.56) и получить выражения, аналогичные приведенным выше для усилий. Однако, эти формулы получаются довольно громоздкими, и лучше прибегнуть к приближенному численному методу с использованием уже полученных выражений для усилий. В частности, если разбить колонну по ее длине на N участков, то с помощью выражения (3.57) можно подсчитать волновую нагрузку на каждом участке для момента времени, когда она достигает максимального значения, а затем, полагая нагрузки распределенными равномерно в пределах каждого отдельного участка, просуммировать моменты этих нагрузок относительно основания колонны. Рассмотрим для примера колонну на рис. 3.15, и разделим ее по длине на два участка – нижний длиной y_1 и верхний длиной y_2-y_1. Равнодействующую нагрузки на нижнем участке обозначим $F_1=F(y_1)$, а на верхнем участке $F_2-F_1=F(y_1)-F(y_2)$. В предположении равномерного распределения волновых нагрузок на отдельных участках их равнодействующие приложены посередине длины соответствующего участка и, следовательно, момент этих сил относительно основания колонны



$$M=\frac{1}{2}F_1y_1+\frac{1}{2}(F_2-F_1)(y_2+y_1), \tag{3.63}$$

где силы F соответствуют выбранному моменту времени и подсчитываются по формуле (3.57). Для нахождения максимального момента от волновой

Рис. 3.15. Эпюра волновой нагрузки и ее аппроксимация.

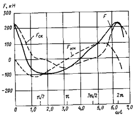


Рис. 3.16. Изменение суммарной волновой нагрузки F на колонну и ее скоростной $F_{ск}$ и инерционной $F_{ин}$ составляющих во времени.

нагрузки на колонну следует, очевидно, выбрать тот момент времени, в который волновая нагрузка достигает максимума.

Предложенный способ дает тем большую точность, чем больше число участков, на которые разбивается колонна. В общем случае при числе участков N получим

$$M = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (F_n - F_{n-1})(y_n + y_{n-1}), \tag{3.64}$$

причем F_0 и y_0 равны нулю.

Пример 3.4–2. Как и в предыдущем примере, рассмотрим волну высотой 10,7 м и длиной 115 м, распространяющуюся в акватории глубиной 23 м. Определим максимальную волновую нагрузку и соответствующий ей момент на колонну диаметром 1,22 м, простирающуюся от дна до поверхности воды. Воспользуемся теорией волн Стокса пятого порядка и положим $C_{ск} = 1$; $C_{ин} = 2$.

Поскольку здесь рассматриваются те же параметры волны и та же теория волн, что и в примере 3.3–2, могут быть использованы и некоторые полученные ранее результаты. При $\rho = 1{,}026 \cdot 10^3$ кг/м^3 $D = 1{,}22$ м; $\omega = 0{,}723$ с$^{-1}$ и $k = 0{,}055$ м$^{-1}$ суммарная волновая нагрузка на колонну находится с помощью выражения (3.57), в котором следует положить $y = h + \eta$, где η в соответствии с теорией Стокса отвечает уравнению (3.18). Результаты вычислений, выполненные с помощью калькулятора и показанные на рис. 3.16, отражают изменение суммарной волновой нагрузки, а также ее скоростной и инерционной составляющих в зависимости от ωt. Волновая нагрузка имеет максимальное значение в момент времени, приблизительно равный $\omega t = 6{,}0$, и составляет $F_{max} = 264{,}2$ кН. В указанный момент времени скоростная составляющая волновой нагрузки равна 205,5, а инерционная – 58,7 кН.

Таблица 3.11. **Влияние числа участков N на значение момента M**

N	2	5	10	20
M, кН · м	4800	5139	5180	5193

Для определения момента, соответствующего вычисленной волновой нагрузке, следует воспользоваться выражением (3.64) и положить в нем наибольшее значение $y = h + \eta = 28{,}9$ м, найденное из выражения (3.18) при $\omega t = 6{,}0$. Значения момента, полученные при разбиении длины колонны на различное число N участков, приведены в табл. 3.11. С увеличением N от 10 до 20 значение момента практически не изменяется и равно 5193 кНм. Значение момента при $N = 5$ отличается от этого всего на 1 %, а при $N = 2$ – на 8 %. Таким образом, формула (3.64) позволяет получать достаточно точные результаты даже при малом числе участков. Равнодействующая волновой нагрузки приложена на высоте $b = M/F = 19{,}6$ м над уровнем дна.

Полученные здесь результаты могут быть сопоставлены с найденными в примере 3.4–1 по теории Эри. Там было получено $F_{max} = 223{,}9$ кН и $M = 3991$ кН · м. В этом примере более точным методом найдены $F_{max} = 264{,}2$ кН и $M = 5193$ кН · м.

Нагрузки от кноидальных волн

Согласно теории кноидальных волн, распространяющихся на мелководье, горизонтальные скорость и ускорение частиц воды не изменяются по глубине – значит, и погонная волновая нагрузка оказывается постоянной по длине колонны. Выполнив интегрирование в выражении (3.44), получим волновую нагрузку на участок колонны от дна до уровня y, равную fy, и момент этой нагрузки относительно основания колонны, равный $fy^2/2$.

Эффекты относительного движения

Изложенное выше относится к случаю, когда колонна является неподвижной. Такая ситуация обычно и предполагается в инженерных расчетах сооружений континентального шельфа даже тогда, когда в действительности колонна совершает некоторое движение под действием волн.

При учете движения колонны действующая на нее скоростная составляющая волновой нагрузки уменьшается вследствие относительного движения, при этом уменьшается и инерционная составляющая пропорционально ускорению движения колонны. Соответствующая этому положению форма уравнения Морисона может быть получена подстановкой в (3.42) $|v_x - \dot{x}|\ (v_x - x)$ вместо $|v_x| v_x$ и добавлением в правой части слагаемого $-\rho(C_{ин} - 1)(\pi D^2/4)\ddot{x}$. Здесь $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ обозначают соответственно горизонтальные составляющие скорости и ускорения движения элемента колонны. *Последнее выражение следует из гидромеханики и представляет собой усилие, связанное с ускорением жидкости, обусловленным движением колонны.* Это имеет особое значение при изучении динамики морских гидротехнических сооружений (глава 6), когда должна учитываться инерция элементов сооружения.

Для иллюстрации рассмотрим вертикальную колонну единичной длины. Пусть F означает общую, не связанную с движением воды, горизонтальную нагрузку на участок колонны, а f – нагрузку от воды, получаемую по уточненному уравнению Морисона, тогда уравнение движения участка колонны в горизонтальном направлении получает вид

$$m\ddot{x} = F + f, \tag{3.65}$$

где m – масса участка колонны, а выражение для f получается внесением в (3.42) указанных выше изменений

$$f = -\frac{1}{2}\rho C_{\text{ск}} D |v_x - \dot{x}| (v_x - \dot{x}) + \rho C_{\text{ин}} \frac{\pi D^2}{4} a_x - \rho (C_{\text{ин}} - 1) \frac{\pi D^2}{4} \ddot{x}.$$

Подставляя это выражение в (3.65), получаем

$$(m + m')\ddot{x} = F + \frac{1}{2}\rho C_{\text{ск}} D |v_x - \dot{x}| (v_x - \dot{x}) + \rho C_{\text{ин}} \frac{\pi D^2}{4} a_x, \tag{3.66}$$

где $m' = \rho (C_{\text{ин}} - 1)(\pi D^2/4)$.

Анализируя последнее выражение, можно убедиться, что эффект ускоренного движения элемента колонны в воде эквивалентен увеличению массы (погонной массы) на величину m'. Масса m' именуется *присоединенной погонной массой, а суммарная масса $m + m'$ – эффективной массой.*

Влияние диаметра колонны

Применимость уравнения Морисона ограничена случаями, *когда диаметр колонны мал в сравнении с длиной обтекающей волны,* и следовательно, обратное влияние колонны на параметры волны пренебрежимо мало. Если это условие не выполняется, то должно быть учтено искажение волны, происходящее в результате ее взаимодействия с колонной.

Заметим, однако, что, если диаметр колонны соизмерим с длиной волны, то мало отношение высоты волны к диаметру колонны и, как следует из (3.54), скоростная составляющая волновой нагрузки пренебрежимо мала. Таким образом, в случаях, когда необходимо учитывать влияние диаметра колонны, достаточно рассматривать только инерционную составляющую нагрузки. Эти вопросы были исследованы вначале в работе [20], а затем на основании теории волн малой

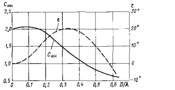


Рис. 3.17. Зависимость коэффициента инерционного сопротивления $C_{\text{ин}}$ и угла сдвига фазы ε от D/λ [30].

амплитуды и в предположении о неподвижности колонны в работе [30]. Согласно теории дифракции волн учет влияния диаметра колонны приводит к необходимости изменения значения коэффициента инерционного сопротивления в уравнении Морисона и введения сдвига по фазе. Выражение погонной нагрузки на вертикальную колонну вызванной *падающей* поверхностной волной, описываемой уравнением $\eta = (H/2)\cos(kx - \omega t)$, может быть получено (при условии, что, как и ранее, начало координат x, y находится в основании колонны на дне) в виде

$$f = -\rho C_{\text{ин}} \frac{\pi D^2}{4} \omega^2 \frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kx} \sin(\omega t - \epsilon), \tag{3.67}$$

где ϵ – угол сдвига по фазе.

Вследствие искажения волны при обтекании его цилиндрической колонны *коэффициент инерционного сопротивления $C_{\text{ин}}$ и угол сдвига по фазе ϵ изменяются* соответственно отношению диаметра колонны к длине волны (рис. 3.17).

3.5. Волновая нагрузка на наклонные цилиндрические элементы

Применение уравнения Морисона к произвольно наклоненным цилиндрическим преградам представляет интерес при определении волновой нагрузки на поперечные связи в сооружениях морского шельфа и наклонные опорные колонны. Различные приближенные способы применения уравнения Морисона к этим задачам рассмотрены в работе [43]. Наиболее последовательно этот вопрос изучен в [6]. В указанном решении предусматривается разложение скорости и ускорений жидкости на нормальную и тангенциальную по отношению к оси цилиндра составляющие и последующее использование при подсчете погонной волновой нагрузки по формуле Морисона только одной

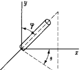


Рис. 3.18. Цилиндрический элемент, произвольно ориентированный в пространстве.

нормальной составляющей скорости и ускорения. Такое представление увязывается с формулой (3.42) для вертикального цилиндра, в которой фигурирует только нормальная составляющая скорости. Волновая нагрузка на наклонный цилиндр по направлению нормальна к его оси, но для упрощения последующих инженерных расчетов ее удобнее представить в виде горизонтальной и вертикальных составляющих.

В качестве иллюстрации рассмотрим неподвижный цилиндр, произвольно ориентированный в системе осей xyz (рис. 3.18). Пусть, как и ранее, направление распространения волны совпадает с осью x, при этом связанное с волнением движение воды характеризуется горизонтальными и вертикальными составляющими скорости v_x, v_y и ускорения a_x, a_y. Введем полярную систему координат, в которой удобнее характеризовать положение оси цилиндра (см. рис. 3.18). Скорость жидкости, нормальная к оси цилиндра, находится в этой системе координат по формуле

$$v_n=[\,v_x^2+v_y^2-(c_xv_x+c_yv_y)^2\,]^{1/2}, \tag{3.68}$$

а ее составляющие в направлениях x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} v_{nx}&=v_x-c_x(c_xv_x+c_yv_y);\\ v_{ny}&=v_y-c_y(c_xv_x+c_yv_y);\\ v_{nz}&=-c_z(c_xv_x+c_yv_y), \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

где

$$\left.\begin{aligned} c_x&=\sin\varphi\cos\theta;\\ c_y&=\cos\varphi;\\ c_z&=\sin\varphi\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{3.70}$$

Составляющие ускорения жидкости, нормального к оси цилиндра,

$$\left.\begin{aligned} a_{nx}&=a_x-c_x(c_xa_x+c_ya_y);\\ a_{ny}&=a_y-c_y(c_xa_x+c_ya_y);\\ a_{nz}&=-c_z(c_xa_x+c_ya_y). \end{aligned}\right\} \tag{3.71}$$

Имея эти выражения, можно получить уравнение Морисона для составляющих погонной волновой нагрузки на цилиндрическую преграду

$$\left.\begin{aligned} f_x&=\frac{1}{2}\,\rho C_{\text{ск}}Dv_nv_{nx}+\rho C_{\text{ин}}\frac{\pi D^2}{4}\,a_{nx};\\ f_y&=\frac{1}{2}\,\rho C_{\text{ск}}Dv_nv_{ny}+\rho C_{\text{ин}}\frac{\pi D^2}{4}\,a_{ny},\\ f_z&=\frac{1}{2}\,\rho C_{\text{ск}}Dv_nv_{nz}+\rho C_{\text{ин}}\frac{\pi D^2}{4}\,a_{nz}. \end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

Суммарная волновая нагрузка на единицу длины цилиндра

$$f=\pm\,(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{1/2}, \tag{3.73}$$

причем знак суммарной нагрузки зависит от знаков составляющих f_x, f_y и f_z.

Для сравнительно коротких элементов, таких как поперечные связи сооружения, где характеристики движения жидкости изменяются несущественно от одного конца элемента к другому, можно использовать осредненные значения v_x, v_y, a_x и a_y, и тогда составляющие волновой нагрузки на элемент

$$F_x=f_xL;\quad F_y=f_yL;\quad F_z=f_zL, \tag{3.74}$$

где L – длина элемента. В общем случае, когда скорости и ускорения изменяются по длине элементов заметно, составляющие волновой нагрузки на элемент в целом находятся интегрированием

$$F_x=\int_s f_x ds;\quad F_y=\int_s f_y ds;\quad F_z=\int_s f_z ds, \tag{3.75}$$

где s – расстояние вдоль оси элемента, при этом интегрирование осуществляется по части длины элемента, подверженной действию волны.

Пример 3.5–1. Определим волновую нагрузку на элемент *1–2* фронтальной стороны основания буровой платформы (рис. 3.19), полагая волновое воздействие сравнительно равномерным по длине элемента, при следующих значениях скоростей и ускорения жидкости: $v_x=4{,}2$ м/с; $v_y=1{,}2$ м/с; $a_x=1{,}2$ м/с^2; $a_y=1{,}8$ м/с^2. Эти характеристики соответствуют уровню 28,5 м над дном моря. Диаметр элемента 0,61 м.

Из рисунка следует, что углы, определяющие положение элемента в пространстве, $\theta=90°$, $\varphi=135°$.

Подставив эти значения в (3.70), получим $c_x=0$; $c_y=-0{,}707$; $c_z=0{,}707$.

По формулам (3.69) и (3.71) найдем составляющие нормальных к оси элемента скорости и ускорения движения воды

$$v_{nx}=4{,}2\text{ м/с};\ v_{ny}=v_{nz}=0{,}6\text{ м/с};$$

$$a_{nx}=1{,}2\text{ м/с}^2;\ a_{ny}=a_{nz}=-0{,}9\text{ м/с}^2.$$

Далее по формуле (3.68) найдем значение скорости, нормальной к оси элемента, $v_n=4{,}28$ м/с, и по (3.72) составляющие f_x, f_y, f_z, полагая $C_{\text{ск}}=1$; $C_{\text{ин}}=2$; $\rho=1{,}026\cdot10^3$ кг/м^3; $D=0{,}61$ м:

$$f_x=6{,}34;\ f_y=f_z=0{,}26\text{ кН/м}.$$

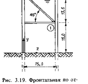


Рис. 3.19. Фронтальная по отношению к волнам сторона опорного основания буровой платформы.

Длина элемента, находящегося в воде, $L = 13{,}5\sqrt{2} = 19{,}1$ м. Таким образом, составляющие волновой нагрузки на элемент в целом (в предположении постоянства характеристик движения жидкости по длине элемента), определяемые по выражениям (3.74), равны $F_x = 121$; $F_y = F_z = 5$ кН.

По рис. 3.19 можно заметить, что полученные результаты справедливы и при иных значениях углов θ, φ, определяющих положение элемента, а именно при $\theta = -90^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$, поскольку выбор положительного направления по оси элемента не играет роли в подобных расчетах. Действительно, при таких значениях углов изменятся знаки у c_x и c_y, но значения нормальных к оси элемента составляющих скорости и ускорения, а значит, и нагрузок, не изменятся.

3.6. Максимальные волновые нагрузки на морское гидротехническое сооружение

Полученные выше зависимости для вертикальных колонн и произвольно ориентированных цилиндров могут быть применены к отдельным элементам сооружения при определении максимальной горизонтальной нагрузки на сооружение от регулярного волнения. Если опорные колонны сооружения вертикальные, то действующие на них волновые нагрузки могут быть получены по формулам (3.46) и (3.57), причем первая из них используется, если в качестве расчетной принята теория Эри, а вторая формула отвечает теории Стокса. Если колонна находится в начале координат $x = 0$, эти формулы могут быть применены непосредственно для определения нагрузки на колонну в любой момент ωt. Если же колонна находится на расстоянии x_0 от начала координат, формулы должны быть преобразованы, с тем чтобы получить нагрузку в тот же момент ωt. Так как обусловленное волнением движение воды зависит только от параметра $\omega t - kx$, необходимое преобразование заключается в замене ωt на $\omega t - kx_0$, где k – волновое число.

Горизонтальные волновые нагрузки на остальные элементы сооружения определяются численным интегрированием первого выражения в (3.72) с учетом изменения характеристик движения жидкости по длине элемента. Эта же зависимость должна быть использована для наклонных опорных колонн. Максимальная горизонтальная нагрузка на сооружение находится суммированием вкладов в нагрузку от всех отдельных элементов и исследованием суммарной нагрузки в зависимости от ωt. Более детально это показано в примере 3.6–1.

На рис. 3.20. показаны результаты расчетов по изложенной выше методике для небольшой опытной модели, на которой экспериментально изучалось воздействие регулярных волн различной частоты [35]. Все четыре стороны модели сооружения одинаковы; колонны, наклоненные к вертикали на угол 5°, имеют диаметр 5,08 см; диагональные элементы диаметром 2,54 см соединяются с аналогичными им элементами на смежных сторонах. Глубина воды 4,87 м. Расчеты проведены с использованием теории Стокса для волн крутизной, равной 1/20 при $C_{ск} = 1$,

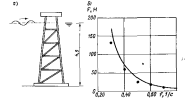


Рис. 3.20. Экспериментальное исследование зависимости суммарной волновой нагрузки от частоты волнения: *а* – схема модели основания буровой платформы; *б* – результаты исследования.

—— расчет; . . . эксперимент.

$C_{ин} = 2$. Как видно, результаты экспериментального исследования модели сооружения в волновом лотке удовлетворительно согласуются с расчетными даже при упрощенном выборе значений коэффициентов сопротивления $C_{ск}$ и $C_{ин}$.

Пример 3.6–1. Рассмотрим простое по конструкции сооружение (рис. 3.21) из четырех колонн, соединенных горизонтальными и диагональными связями. Фронтальная и тыловая стороны сооружения одинаковы, также как одинаковы и боковые стороны. Определим общую горизонтальную нагрузку на сооружение от волн высотой 6 м, длиной 90 м и при глубине воды 24 м. Опорные колонны имеют диаметр 1,22 м, а горизонтальные и наклонные элементы – 0,61 м. Примем $C_{ск} = 1$ и $C_{ин} = 2$.

Максимальная горизонтальная волновая нагрузка на сооружение определяется расчетами при различных значениях ωt. Примем в качестве первого приближения $\omega t = 6{,}0$. Для упрощения расчетов

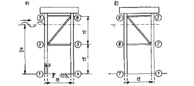


Рис. 3.21. Боковая (*а*) и фронтальная (*б*) по отношению к волновому воздействию стороны основания буровой платформы.

воспользуемся теорией Эри, хотя такие расчеты следовало бы выполнять с использованием более точной теории Стокса. Принятая система осей координат изображена на рис. 3.21.

В е р т и к а л ь н ы е к о л о н н ы. Для подсчета волновой нагрузки на вертикальные колонны воспользуемся формулами (3.46) – (3.48). Они выведены для случая, когда колонна находится в сечении $x=0$, а следовательно, непосредственно применимы к колонне *1–3* при любом значении ωt. Чтобы подсчитать в тот же момент времени нагрузку на колонну *4–6* ($x=15$ м), эти формулы должны быть видоизменены. Как уже отмечалось, движение воды, обусловленное волнением, определяется только параметром $\omega t - kx$, поэтому в формулах (3.47) и (3.48) достаточно заменить ωt на $\omega t - 15k$. Итак, для колонны *1–3* получим при $x=0$, $k=0{,}070$ м$^{-1}$, $\omega=0{,}800$ рад/с, $H=6$ м, $\rho=1{,}026\cdot10^3$ кг/м^3, $h=24$ м, что $F_{1-3}=1{,}92(\mathrm{sh}\,2ky+2ky)|\cos\omega t|\cos\omega t-25{,}4\,\mathrm{sh}\,ky\sin\omega t$, где $y=h+\eta=24+3\cos\omega t$, а нагрузка F измеряется в килоньютонах.

Для колонны *4–6* получим $F_{4-6}=1{,}92(\mathrm{sh}\,2ky+2ky)|\cos(\omega t-15k)|\times\cos(\omega t-15k)-25{,}4\,\mathrm{sh}\,ky\sin(\omega t-15k)$, где $y=h+\eta=24+3\cos(\omega t-15k)$.

Так как в сооружении при $x=0$ и $x=15$ м имеется по две колонны, суммарная волновая нагрузка на все четыре колонны равна $F_к=2(F_{1-3}+F_{4-6})$.

Подставив $\omega t=6{,}0$, найдем $F_к=2(67{,}5+69{,}5)=274$ кН.

Г о р и з о н т а л ь н ы е э л е м е н т ы ф р о н т а л ь н о й с т о р о н ы. Горизонтальная погонная волновая нагрузка (в килоньютонах на метр) на горизонтальные элементы фронтальной стороны опорного основания определяется по первой формуле в (3.72) при $\theta=-90^\circ$ и $\varphi=90^\circ$. Получим

$$f_x=0{,}313v_nv_x+0{,}600a_x;$$

$$v_n^2=v_x^2+v_y^2.$$

Для элемента *2–8* при $x=0$, $y=15$ м составляющие скорости и ускорения движения воды находятся по формулам (3.7), (3.8) и (3.13) при $\omega t=6{,}0$:

$$v_x=1{,}44 \text{ м/с};\quad v_y=0{,}32 \text{ м/с};\quad a_x=0{,}33 \text{ м/с}^2.$$

Эти значения справедливы на всем протяжении элемента, так как координаты x и y не изменяются вдоль элемента. По этим значениям найдем погонную нагрузку $f_x=0{,}863$ кН/м, которая постоянна по длине элемента. Общая горизонтальная нагрузка на этот элемент $F_{2-8}=0{,}863\cdot15=12{,}94$ кН.

Аналогичные расчеты для горизонтального элемента на тыловой стороне опорного основания (пусть этот элемент имеет номер *5–11*) при $x=15$ м, $y=15$ м приводят к результату $F_{5-11}=10{,}94$ кН.

Н а к л о н н ы е э л е м е н т ы ф р о н т а л ь н о й с т о р о н ы. Горизонтальная погонная волновая нагрузка f_x на наклонный элемент,

расположенный с фронтальной стороны опорного основания, определяется по первой формуле в (3.72) при $\theta=-90^\circ$, $\varphi=45^\circ$:

$$f_x=0{,}313v_nv_x+0{,}600a_x;$$

$$v_n^2=v_x^2+(1/2)v_y^2.$$

Для элемента *2–9* имеем $x=0$ и y, изменяющееся от уровня 15 м до свободной поверхности воды. Уровень свободной поверхности определяется зависимостью $y=24+3\cos\omega t$, что при $\omega t=6{,}0$ дает $y=26{,}9$ м. Так как элемент расположен под углом 45° к оси y, длина его части, подверженной волновому воздействию, равна $(26{,}9-15)/0{,}707=16{,}8$ м. Погонная волновая нагрузка изменяется по длине этого элемента в связи с изменением характеристик движения жидкости по направлению y, следовательно, общая волновая нагрузка на элемент должна находиться путем численного интегрирования. В качестве приближения поделим отрезок длиной 16,8 м на два участка длиной по 8,4 м и подсчитаем нагрузки f_x для середин длины каждого участка. Общая для элемента нагрузка подсчитывается затем в предположении, что f_x постоянна в пределах каждого отдельного участка.

Результаты приближенных расчетов волновой нагрузки при $\omega t=6{,}0$ для элемента *2 – 9*

x, м	y, м	v_x, м/с	v_y, м/с	a_x, м/с^2	f_x, кН/м
0	18,0	1,71	0,42	1,15	1,16
0	23,9	2,47	0,67	1,82	2,29

Общая волновая нагрузка на элемент $F_{2-9}=(1{,}16+2{,}29)8{,}4=28{,}98$ кН.

Аналогичные вычисления для наклонного элемента (имеющего например, номер *5–12*) на тыловой стороне опорного основания приводят к результату $F_{5-12}=15{,}9$ кН.

Н а к л о н н ы е э л е м е н т ы б о к о в о й с т о р о н ы. Горизонтальная погонная нагрузка на наклонный элемент боковой стороны опорного основания определяется по первому в (3.72) выражению при $\theta=0$, $\varphi=45^\circ$:

$$f_x=0{,}156v_n(v_x-v_y)+0{,}300(a_x-a_y);$$

$$v_n^2=(1/2)(v_x-v_y)^2.$$

У элемента *2–6* координаты x и y изменяются вдоль его оси до пересечения со свободной поверхностью воды.

Уровень свободной поверхности для данного элемента определяется из решения системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &y=24+3\cos(\omega t-kx);\\ &y=15+x.\end{aligned}\right\}$$

Первое из этих уравнений отвечает уровню свободной поверхности при заданных значениях t и x, а второе определяется геометрией элемента.

Исключив из этой системы уравнений y, получим $x = 9 + 3 \cos(\omega t - kx)$. При $\omega t = 6{,}0$ решение этого уравнения (полученное итерационным путем) дает $x = 10{,}55$ м.

Таким образом, подъем свободной поверхности воды у рассматриваемого элемента составляет $15 + 10{,}55 = 25{,}55$ м, а часть его длины, подверженная волновому воздействию, равна $10{,}55/0{,}707 = 14{,}9$ м. Как и в предыдущем случае, погонная волновая нагрузка изменяется по длине элемента, поэтому общую волновую нагрузку оценим, разделив длину элемента, подверженную волновому воздействию, на два участка по 7,45 м. Волновые нагрузки f_x определим для середин обоих участков, а общую нагрузку найдем, полагая, что в пределах каждого участка волновые нагрузки распределены равномерно.

Результаты приближенных расчетов волновой нагрузки при $\omega t = 6{,}0$ для элемента *2 – 6*

x, м	y, м	v_x, м/с	v_y, м/с	a_x, м/с^2	a_y, м/с^2	f_x, кН/м
2,64	17,64	1,55	0,66	0,62	–1,04	0,58
7,91	22,91	1,62	1,65	1,42	–1,18	0,78

Общая волновая нагрузка на элемент составляет $F_{2-6} = (0{,}58 + 0{,}78)\,7{,}45 = 10{,}13$ кН. Аналогичные результаты могут быть получены для такого же наклонного элемента (например, мер *8–12*) на противоположной боковой стороне опорного основания, т. е. $F_{8-12} = 10{,}13$ кН.

Суммарная волновая нагрузка на опорное основание. Верхние горизонтальные элементы опорного основания не подвержены воздействию волн, а следовательно, и не участвуют в формировании волновой нагрузки. Нижние горизонтальные элементы на боковых сторонах сооружения параллельны направлению распространения волн, и значит, тоже не испытывают волновой нагрузки. Суммарная волновая нагрузка на сооружение при $\omega t = 6{,}0$ находится сложением нагрузок на опорные колонны и рассмотренные выше элементы, что дает 363 кН.

Для нахождения максимального значения суммарной горизонтальной нагрузки на сооружение весь показанный здесь вычислительный процесс должен быть проведен при различных значениях ωt. Поступив таким образом, можно найти, что горизонтальная нагрузка на сооружение имеет максимальное значение при $\omega t = 5{,}8$ и составляет 366 кН.

3.7. Приведение волновых нагрузок к узловым

Расчеты опорных оснований морских гидротехнических сооружений, имеющих вид пространственных ферм, методами, изложенными в главе 2, требуют приведения распределенных волновых нагрузок к эквивалентным узловым силам и моментам (см. параграф 2.4). Для определения этих усилий обычно устанавливают тот момент волнового цикла, при котором волновые нагрузки достигают максимума. Вклад каждого отдельного элемента в узловую нагрузку находится

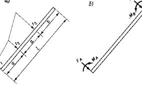


Рис. 3.22. Кусочно-линейная аппроксимация волновой нагрузки на элемент (*а*) и соответствующие ей узловые нагрузки (*б*).

с использованием упрощенного представления о распределении волновых нагрузок по всей длине элемента или его участков. Узловая нагрузка подсчитывается как сумма узловых усилий, передаваемых узлу от всех соединяющихся в нем элементов.

Способ приведения к узловой равномерно распределенной нагрузке был рассмотрен в главе 2. На рис. 3.22 рассмотрен более общий случай распределения нагрузки по длине элемента. Наличие ненагруженного участка на элементе позволяет применять полученные зависимости к рассмотрению верхних элементов сооружения, которые подвержены волновому воздействию лишь на некоторой части их длины.

Узловые нагрузки (см. рис. 3.22, *б*) могут быть определены следующим образом:

$$F_A = \frac{p_1 a b^2}{2l^3}(3l - 2b) + \frac{p_2 b a^2}{l^3}(l - b) + \frac{p_3 a^3}{4l^3}(l - 2b) - \frac{p_4 a^4}{10 l^3};$$

$$M_A = \frac{p_1 a b^2}{2l^3}(l - b) + \frac{p_2 b a^2}{6l^2}(2l - 3b) + \frac{p_3 a^3}{12 l^2}(l - 3b) - \frac{p_4 a^4}{20 l^2};$$

$$F_B = \frac{p_1 a}{2} - F_A;$$

$$M_B = \frac{p_1 a b}{2} + \frac{p_2 a^2}{6} - F_A l + M_A,$$

где

$$p_1 = f_1 + 2f_2 + f_3; \quad p_2 = 5f_1 + 6f_2 + f_3;$$

$$p_3 = 17f_1 + 14f_2 + f_3; \quad p_4 = 49f_1 + 30f_2 + f_3.$$

Рассмотренный билинейный закон распределения нагрузки предоставляет лучшие возможности для более точного ее описания, чем

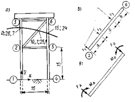


Рис. 3.23. Схема вооружения и положение волны в момент, соответствующий максимальной волновой нагрузке (*а*); аппроксимация волновой нагрузки на элемент *2–6* (*б*) и узловые нагрузки на этом элементе (*в*).

линейный закон изменения нагрузки в пределах всей длины элемента. При необходимости число участков с линейно изменяющимися эпюрами волновой нагрузки может быть принято и бо́льшим.

Пример 3.7–1. Приведем к узловым волновые нагрузки на элементах одной из сторон опорного основания, рассматриваемого в примере 3.6–1. Горизонтальные волновые нагрузки достигают максимума при $\omega t \approx 5{,}8$. Положение волны, отвечающее этому моменту времени, показано на рис. 3.23, *а*.

Вначале рассмотрим наклонный элемент 2–6. В момент $\omega t = 5{,}8$ свободная поверхность воды пересекается с этим элементом на уровне 23,96 м. Эпюра волновой нагрузки на элемент показана на рис. 3.23, *б*, причем a и b (с учетом наклона элемента под углом 45° к вертикали) равны соответственно 7,14 и 6,93 м.

Нормальные к оси элемента интенсивности нагрузки, определенные по (3.73),

$$f_1 = 0{,}678 \text{ кН/м} \quad (x = 0;\ y = 15 \text{ м});$$

$$f_2 = 0{,}905 \text{ кН/м} \quad (x = 5{,}05;\ y = 20{,}05 \text{ м});$$

$$f_3 = 0{,}891 \text{ кН/м} \quad (x = 10{,}1;\ y = 25{,}1 \text{ м}).$$

Соответствующие им узловые нагрузки находятся по вышеприведенным формулам

$$F_A = 8{,}36 \text{ кН};\quad M_A = 29{,}83 \text{ кН·м};$$

$$F_B = 3{,}87 \text{ кН};\quad M_B = 20{,}75 \text{ кН·м}.$$

Разложив эти нагрузки на составляющие в направлении осей x и y и приняв положительными моменты, действующие по ходу часовой стрелки (в соответствии с правилами, принятыми в главе 2), получим

$$F_{2x} = 5{,}87 \text{ кН};\quad F_{2y} = -5{,}87 \text{ кН};\quad M_2 = 29{,}83 \text{ кН·м};$$

$$F_{6x} = 2{,}76 \text{ кН};\quad F_{6y} = -2{,}76 \text{ кН};\quad M_6 = -20{,}75 \text{ кН·м}.$$

Аналогично приводятся к узловым нагрузки на остальных элементах: элемент *1–2*

$$F_{1x} = 10{,}94 \text{ кН};\quad M_1 = 29{,}29 \text{ кН·м};$$

$$F_{2x} = 14{,}50 \text{ кН};\quad M_2 = -33{,}76 \text{ кН·м};$$

элемент *2–3*

$$F_{2x} = 28{,}73 \text{ кН};\quad M_2 = 81{,}63 \text{ кН·м};$$

$$F_{3x} = 24{,}55 \text{ кН};\quad M_3 = -81{,}63 \text{ кН·м};$$

элемент *4–5*

$$F_{4x} = 14{,}90 \text{ кН};\quad M_4 = 39{,}32 \text{ кН·м};$$

$$F_{5x} = 18{,}15 \text{ кН};\quad M_5 = -43{,}39 \text{ кН·м};$$

элемент *5–6*

$$F_{5x} = 25{,}09 \text{ кН};\quad M_5 = 62{,}78 \text{ кН·м};$$

$$F_{6x} = 10{,}27 \text{ кН};\quad M_6 = -40{,}27 \text{ кН·м};$$

элемент *2–5*

$$F_{2y} = -1{,}20 \text{ кН};\quad M_2 = 1{,}42 \text{ кН·м};$$

$$F_{5y} = 1{,}29 \text{ кН};\quad M_5 = 1{,}70 \text{ кН·м}.$$

В дополнение к найденным узловым нагрузкам необходимо определить вклад от элементов, расположенных на фронтальной и тыловой сторонах сооружения. Не будем учитывать здесь силы и моменты, действующие вне плоскости чертежа, – они не нужны при использовании двухмерной схемы сооружения. Нагрузки на присоединенном к узлу *2* горизонтальном элементе фронтальной стороны находятся интегрированием выражения (3.75). При этом горизонтальная составляющая равнодействующей нагрузки равна 14,14, а вертикальная – 3,83 кН. На узел *2* от этого элемента передается половина нагрузки, т. е. дополнительные узловые нагрузки в узле *2* составляют $F_{2x} = 7{,}07$; $F_{2y} = -1{,}91$ кН.

Аналогичным образом находятся дополнительные узловые нагрузки в узле *2* от волновой нагрузки на наклонном элементе фронтальной стороны $F_{2x} = 14{,}46$; $F_{2y} = -0{,}93$ кН.

Узловые нагрузки от горизонтального и наклонного элементов тыловой стороны, присоединяющихся к узлу *5*, находятся тем же способом и равны $F_{5x} = 11{,}92$; $F_{5y} = 5{,}20$ кН.

Таблица 3.12. **Узловые нагрузки от волнового воздействия**

Узел	F_x, кН	F_y, кН	M, кН · м
1	10,94	0	22,29
2	70,72	−9,92	79,19
3	24,55	0	−81,63
4	14,90	0	39,32
5	55,15	6,49	21,15
6	13,03	−2,76	−61,02

Результаты суммирования вкладов в узловые нагрузки от отдельных элементов сведены в табл. 3.12.

На наклонные элементы фронтальной и тыловой сторон сооружения, которые присоединяются к узлам *2* и *5*, действуют еще нагрузки, равные соответственно 1,87 и 4,24 кН. Эти нагрузки действуют вне плоскости чертежа и не учитываются в двухмерной схеме сооружения.

3.8. Силы поддержания

Давление жидкости на полностью или частично погруженный объект обусловлено весом расположенной выше воды и ее движением вокруг объекта, связанным с волнением. Так, выражение (3.15) позволяет определить давление в тех случаях, когда используется теория волн Эри. Одним из проявлений воздействия наружного давления на погруженные в воду элементы морских гидротехнических сооружений является возникновение в этих элементах напряжений, которые не принимались во внимание в расчетах, изложенных в главе 2. Этот вопрос рассматривается в главе 4. Другим проявлением воздействия давления жидкости оказываются горизонтальные и вертикальные нагрузки, обусловленные *волнением и представленные* в обобщенном уравнении Морисона (3.72). Кроме того, существуют еще *силы поддержания*, также связанные с гидростатическим давлением

$$p = \gamma(h - y), \tag{3.76}$$

где γ – удельный вес воды; h – глубина акватории; y – расстояние по вертикали от дна. Эти силы существуют даже при отсутствии волнения и должны быть учтены отдельно.

Для определения сил поддержания рассмотрим тело произвольной формы (рис. 3.24), в котором выделим вертикальный элемент высотой $y_2 - y_1$ и основанием площадью dA. Силы, связанные с давлениями на торцы элемента, равны произведениям этих давлений на площадь dA. Использовав зависимость (3.76), найдем равнодействующую вертикальных сил

$$dF = dF_1 - dF_2 = \gamma(y_2 - y_1)\, dA$$

и выталкивающую силу для тела в целом

$$F = \gamma \int_A (y_2 - y_1)\, dA = \gamma V, \tag{3.77}$$

где V означает объем воды, вытесненной телом. Аналогичные подсчеты с использованием горизонтальных элементарных объемов показывают,

что суммарное горизонтальное усилие на тело равно нулю. Итак, гидростатическое давление на тело вызывает появление выталкивающей силы, равной весу воды, вытесненной телом (закон Архимеда). Этот вывод верен и при частичном погружении тела в воду.

При подсчетах сил поддержания у морских гидротехнических сооружений удобно объединять эти силы с собственным весом сооружения и трактовать результирующую силу как эффективный вес. В частности, если W означает вес сооружения в воздухе, то нетрудно убедиться, что эффективный его вес в воде

$$W' = W - \gamma V, \tag{3.78}$$

где V – объем погруженной в воду части сооружения.

Эта формула справедлива для сооружения в целом. Определенная осторожность, однако, должна быть проявлена при использовании ее для детального исследования напряженного состояния отдельных элементов. Для иллюстрации рассмотрим колонну (рис. 3.25), разделенную на два элемента: *1–2* и *2–3*. Веса (в воздухе) элементов, находящихся выше и ниже дна, обозначим соответственно через W_1 и W_2. Пусть грунт в основании водонасыщенный, а поровое давление равно гидростатическому, т. е. такое же, как при отсутствии грунта. Сила поддержания, действующая на нижний торец колонны, равна в таком случае $\gamma A(h + d)$, где A – площадь торца подверженного действию гидростатического давления. Но эта сила равна весу воды, вытесненной колонной, а значит, ее эффективный вес равен разнице фактического веса и веса вытесненной воды. Однако, поскольку сила поддержания действует только на торец колонны, то эффективный вес элемента *2–3*, находящегося над дном, равен его фактическому весу, что и показано на рис. 3.25. Этот вывод *имеет существенное значение при определении узловых нагрузок на* сооружение от собственного веса и сил поддержания.

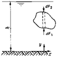


Рис. 3.24. Гидростатическая нагрузка на тело, погруженное в жидкость.

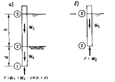


Рис. 3.25. Силы поддержания и собственного веса, действующие на колонну (*а*) и ее элемент (*б*).

Пример 3.8–1. Определим узловые нагрузки для рамы на рис. 3.26, обусловленные собственным весом металлической конструкции и силами поддержания, соответствующими моменту, в который волновые нагрузки достигают максимума (при $\omega t = 5{,}8$). Все четыре стороны сооружения одинаковы, причем наклонный элемент на фронтальной стороне присоединен к узлам *2* и *5*. Положение волны в момент $\omega t = 5{,}8$ показано на рисунке. Вертикальные элементы имеют наружный диаметр 1,22 м и толщину стенок 3,81 см, горизонтальные и наклонные элементы имеют диаметр 0,61 м и толщину стенки 1,27 см.

Начнем с рассмотрения наклонного элемента *2–6*. Он полагается незаполненным водой (водонепроницаемым), т. е. его собственный вес определяется как произведение удельного веса стали (76 кН/м^3) на объем стали в элементе (0,512 м^3), что дает 38,95 кН. Так как элемент наклонен на 45° относительно вертикали, этот вес должен быть разложен на нормальную и касательную к оси элемента составляющие, равные по 27,54 кН. Более того, эти составляющие распределены по длине элемента равномерно, так что приведение их к узловым нагрузкам может быть проделано в соответствии с результатами, приведенными на рис. 2.28. Приведение собственного веса элемента к узловым нагрузкам показано на рис. 3.27, *а*.

При подсчете силы поддержания У элемента отметим, что в момент $\omega t = 5{,}8$ свободная поверхность воды пересекается с элементом на расстоянии 14,28 м от узла *2* (см. рис. 3.26). Сила поддержания создается только на этом участке элемента и равна произведению удельного веса воды (10,05 кН/м^3) на объем воды, вытесненной элементом (4,24 м^3), что дает 42,66 кН. Эта вертикальная сила имеет нормальную и касательную к оси элемента составляющие, равные по 30,16 кН и распределенные равномерно по длине погруженной в воду части элемента. Узловые усилия от нормальной составляющей могут быть определены по формулам параграфа 3.7, а от касательной составляющей – по формулам к рис. 2.28. Результаты приведения этой нагрузки к узловым силам показаны на рис. 3.27, *б*. Сложением узловых нагрузок от собственного веса элемента и силы поддержания (рис. 3.27, *в*) получим их сначала в виде составляющих, действующих вдоль и поперек оси элемента, а затем в виде горизонтальной и вертикальной составляющих. Эти узловые нагрузки передаются на узлы *2* и *6* рамы.

Узловые нагрузки от собственного веса и сил поддержания для остальных элементов боковой стороны сооружения могут быть подсчитаны тем же способом. Заметим, что на вертикальные элементы *1–2*, *2–3* и другие силы поддержания не действуют, так что узловые нагрузки от этих элементов создаются только собственным весом (164,12 кН). Это положение остается в силе независимо от того, будет ли элемент заполнен водой или нет, так как давление столба воды внутри элемента уравновешивается водой, находящейся в нем ниже уровня морского дна. Для элемента *1–2*, например, вертикальные и направленные вниз силы, действующие в узлах *1* и *2*, равны по 82,06 кН (см. рис. 2.28). Так как расположенный в средней по высоте части сооружения элемент *2–5* полностью погружен в воду, его эффективный вес равномерно распределен

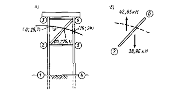


Рис. 3.26. Схема сооружения и положение волны, при котором определяются силы поддержания и собственного веса (*а*), силы веса и поддержания на элементе *2–6* (*б*).

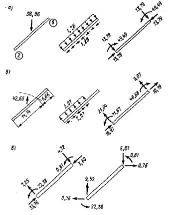


Рис. 3.27. Нагрузки на элемент *2–6*: *а* – от собственного веса; *б* – от сил поддержания; *в* – суммарные, приведенные к узловым.

Таблица 3.13. **Узловые нагрузки от собственного веса и сил поддержания**

Узел	F_x, кН	F_y, кН	M, кН·м
1	0	–81,84	0
2	–0,76	–132,1	–44,1
3	0	–109,4	35,0
4	0	–81,84	0
5	0	–146,8	21,7
6	0,76	–115,2	–35,8

по длине элемента. Полагая, что этот элемент не заполнен водой, найдем по формуле (3.78), что его эффективный вес равен 17,12 кН и направлен вверх. Соответствующая ему распределенная нагрузка равна 1,14 кН/м. В узлах *2* и *5* действуют узловые силы по 8,56 кН, направленные вверх, и моменты, равные 21,7 кН·м (в узле *2* момент направлен против хода часовой стрелки, в узле *5* – по ходу). В противоположность этому на элемент *3–6* силы поддержания не действуют, так как он не погружен в воду, и равномерно распределенная по его длине нагрузка от собственного веса (1,81 кН/м) эквивалентна узловым силам в узлах *3* и *6*, равным по 13,78 кН и направленным вниз, а также моментам по 35 кН·м (в узле *3* по ходу часовой стрелки, в узле *6* – против хода).

Наконец, узловые нагрузки от эффективного веса элементов фронтальной и тыловой сторон сооружения подсчитываются в предположении, что эти веса передаются узлам на боковых сторонах поровну. Так, эффективный вес элемента *2–9* равен 10,18 кН и направлен вверх, так что его вклад в узловую силу узла *2* составляет 5,09 кН. Аналогично вклад элемента *2–8* в вертикальную узловую нагрузку в узле *2* равен 8,58 кН (вверх), а вклад в узловую нагрузку в узле *3* от элемента *3–9* составляет 13,78 кН (вниз). Наклонный и горизонтальный элементы тыловой стороны, присоединяющиеся к узлу *5*, создают в этом узле нагрузку, равную 0,26 кН и направленную вниз, а горизонтальный элемент той же стороны, присоединенный к узлу *6*, вызывает в этом узле вертикальную и направленную вниз нагрузку 13,78 кН.

Суммируя по узлам приведенные выше значения, получаем узловые нагрузки, обусловленные собственным весом и силами поддержания, которые представлены в табл. 3.13.

3.9. Нагрузки от течения

Течения относятся к сравнительно постоянным по характеру движениям масс воды, являющимся результатом приливных явлений, ветрового нагона, речного стока. Чаще всего течения, которые учитываются в расчетах морских гидротехнических сооружений, связаны с приливами и ветровым нагоном. Как в одном, так и в другом случае течения обычно полагаются горизонтальными по направлению и изменяющимися с увеличением глубины.

Величина и направление приливного течения на поверхности воды обычно оцениваются по измерениям в натурных условиях в предполагаемом месте посадки сооружения. При этом направление течения

Рис. 3.28. Расчетные эпюры скоростей течения воды.

1 – приливное течение; *2* – течение от ветрового нагона.

изменяется соответственно подъему или понижению уровня воды. В противоположность этому течение от ветрового нагона обычно оценивается расчетным путем, причем полагается, что скорость такого течения равна 1 % скорости ветра на высоте 10 м над поверхностью воды. В инженерных расчетах часто полагается, что изменение скорости приливного течения по глубине может быть описано зависимостью $U_{пр} = U_{0,\,пр}(y/h)^{1/7}$, а эпюра скоростей течения от ветрового нагона линейная [32] и отвечает зависимости $U_{в.н} = U_{0,\,в.н}(y/h)$, где все обозначения пояснены на рис. 3.28.

В штормовых условиях течения существуют вместе с движением воды, обусловленным волнением. Направление приливного течения может, конечно, не совпадать с направлением распространения волн. Однако направление течения от ветрового нагона всегда считается совпадающим с направлением распространения волн.

Поверхностные волны, существующие вместе с течением, отличаются от волн при отсутствии течений. Можно ожидать, что различие этих волн зависит от отношения скорости течения и скорости распространения волн. Для расчетной волны, отвечающей условиям экстремального шторма, это отношение обычно достаточно мало, что позволяет пренебречь влиянием течения на волнение. Таким образом, для расчетного регулярного волнения и произвольно изменяющегося с увеличением глубины течения определение нагрузок на сооружение обычно выполняется путем сложения горизонтальных скоростей воды, обусловленных волнением, с составляющей скорости течения в направлении распространения волн. По этой суммарной горизонтальной скорости, а также вертикальной скорости и двум составляющим ускорения частиц воды и определяется максимальная нагрузка на сооружение и узловые усилия по методике, изложенной в параграфах 3.6 и 3.7.

3.10. Дополнительные внешние нагрузки

Ледовые нагрузки могут играть существенную роль в определенных районах эксплуатации сооружений, а особенно в полярных районах, где ледовые поля имеют большую толщину и перемещаются вместе с приливами, оказывая на опорные колонны сооружения значительное давление (рис. 3.29).

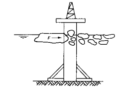


Рис. 3.29. Воздействие льда на сооружение.

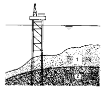


Рис. 3.30. Воздействие наносов на сооружение.

1 – мягкие отложения; *2* – уплотненные отложения.

Усилие F, возникающее при разрушении льда сооружением, может быть определено по зависимости

$$F = Cf_p A, \tag{3.79}$$

в которой f_p – прочность льда на раздробление; C – коэффициент пропорциональности; A – площадь контакта опоры с ледяным покровом. Типичные значения C лежат в пределах от 0,3 до 0,7, а для f_p они находятся в пределах от 1,4 до 3,5 МПа. При отсутствии необходимых экспериментальных данных значение Cf_p можно принять равным 2,5 МПа, что отвечает экстремальным условиям. Если толщина льда t, а диаметр опорной колонны D, то площадь A может быть принята равной tD, что опять-таки отвечает экстремальным условиям. Поскольку приливные явления связаны иногда со значительными изменениями уровня спокойной воды, то при подсчете ледовых нагрузок следует иметь в виду не только величину самой нагрузки, но и возможное место приложения ее к сооружению.

Нагрузки от наносов могут возникнуть в результате скольжения наносов по подстилающим грунтам на месте эксплуатации сооружений, а особенно в районе речных дельт, где мягкие грунты постоянно выносятся вместе с речным стоком (рис. 3.30).

Нагрузка на единицу длины опорной колонны, прорезающей скользящий слой наносов, находится по формуле

$$f = N\tau D, \tag{3.80}$$

где N – коэффициент пропорциональности; τ – предел прочности грунта на сдвиг; D – диаметр колонны. Типичные значения N лежат в пределах от 7 до 9. Прочность на сдвиг мягких отложений обычно устанавливается экспериментальным путем по испытаниям образцов, взятых на месте эксплуатации сооружения. Типичные его значения находятся в пределах от 5 до 10 МПа.

Так как слой наносов может быть достаточно мощным, то нагрузки от них на опорные колонны обычно рассматриваются как распределенные. В этом они отличаются от ледовых нагрузок, которые, как правило, из-за относительно небольшой толщины льда считаются сосредоточенными.

Задачи

1. Определить равнодействующую F ветровой нагрузки на маяк (рис. 3.31) и ее возвышение над подошвой верхнего строения при расчетной скорости ветра 80 м/с (с учетом порывов).

Верхнее строение маяка *1* имеет размеры 12 х 12 х 4,5 м; а башня *2* - диаметр 3 м и высоту 6 м.

Ответ: $F = 318$ кН; $b = 2{,}75$ м.

2. Определить период волны Эри, имеющей длину 150 м и распространяющуюся на акватории глубиной 30 м.

Ответ: $T = 10{,}6$ с.

3. Определить длину волны Эри, имеющей период 9 с и распространяющейся на акватории глубиной 25 м.

Ответ: $\lambda = 112$ м.

4. Для волны, описанной в задаче 2, определить максимальную горизонтальную скорость частиц жидкости на гребне, полагая высоту волны H равной 6 м.

Ответ: $v_x = 2{,}32$ м/с.

5. Определить при условиях, заданных в задаче 2, скорость распространения волны c.

Ответ: $c = 13{,}68$ м/с.

6. Используя теорию Эри, определить горизонтальные составляющие скорости и ускорения движения частиц воды при $x = 15$ м, $y = 24$, $t = 6$ с, $h = 27$ м. Отклонение волновой поверхности воды описывается формулой (3.6), при этом $H = 6$ м; $k = 0{,}0592$ м$^{-1}$; $\omega = 0{,}732$ рад/с.

Ответ: $v_x = -1{,}90$ м/с; $a_x = 0{,}529$ м/с^2.

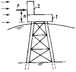


Рис. 3.31. К задаче 1.

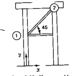


Рис. 3.32. К задаче 16.

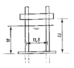


Рис. 3.33. К задаче 18.

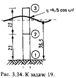


Рис. 3.34. К задаче 19.

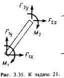


Рис. 3.35. К задаче 21.

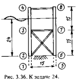


Рис. 3.36. К задаче 24.

7. Для условий задачи 6 определить вертикальные составляющие скорости и ускорения.

Ответ: $v_y = 0{,}642$ м/с; $a_y = 1{,}235$ м/с^2.

8. Используя теорию Стокса, определить возвышение гребня волны высотой H = 18 м, длиной λ = 250 м, распространяющейся на акватории глубиной 100 м.

Ответ: 11,5 м.

9. Определить период волны Стокса, параметры которой заданы в задаче 8.

Ответ: $T = 12{,}4$ с.

10. Для волны Стокса, отвечающей уравнению свободной поверхности в виде (3.18), определить горизонтальные составляющие скорости и ускорения движения частиц воды при $x = 0$, $y = 15$ м, $\omega t = 6{,}0$. Волна имеет высоту 10,7 м, длину 115 м и распространяется на акватории глубиной 23 м.

Ответ: $v_x = 2{,}84$ м/с; $a_x = 0{,}72$ м/с^2.

11. Для условий задачи 10 определить вертикальные составляющие скорости и ускорения.

Ответ: $v_y = 0{,}68$ м/с; $a_y = -1{,}26$ м/с^2.

12. Определить возвышение гребня кноидальной волны высотой H = 3 м и длиной 120 м, распространяющейся на акватории глубиной 12 м.

Ответ: $\eta = 1{,}8$ м.

13. Определить период волны, параметры которой заданы в задаче 12.

Ответ: $T = 10{,}6$ с.

14. Определить максимальную нагрузку на колонну диаметром 1,22 м, которая простирается от морского дна до уровня, превышающего взволнованную поверхность моря, при воздействии волн Эри высотой 6 м и длиной 90 м. Глубина воды 24 м. Принять $C_{ск} = 1$; $C_{ин} = 2$. Ответ: 78 кН.

15. Определить максимальную горизонтальную нагрузку и ее момент относительно основания на колонну диаметром 2,44 м, которая простирается от морского дна до уровня, превышающего взволнованную поверхность моря, при воздействии волн Стокса высотой 21,5 м и длиной 230 м. Глубина воды 46 м. Принять $C_{ск} = 1$; $C_{ин} = 2$.

Ответ: 2,11 МН; 22,1 МН · м.

16. Определить горизонтальную и вертикальную составляющие погонной волновой нагрузки на средней по длине части элемента *1–2* боковой стороны сооружения, изображенной на рис. 3.32. Диаметр элемента 0,61 м. Параметры движения воды, обусловленного волнением: $v_x = 4{,}17$ м/с; $v_y = 1{,}28$ м/с; $a_x = 1{,}22$ м/с^2; $a_y = -2{,}06$ м/с^2. Принять $C_{ск} = 1$; $C_{ин} = 2$.

Ответ: $f_x = -f_y = 1{,}9$ кН/м.

17. Определить составляющие f_x и f_y для элемента *1–2*, рассмотренного в предыдущей задаче с учетом дополнительно к волновому воздействию течения со скоростью 0,67 м/с.

Ответ: $f_x = -f_y = 2{,}4$ кН/м.

18. Для сооружения с четырьмя опорными колоннами диаметром 0,91 м определить максимальную горизонтальную волновую нагрузку и момент ее наступления (ωt). Все стороны сооружения одинаковы, одна из них изображена на рис. 3.33. Волны Эри имеют высоту 4,5 м и длину 67,5 м. Глубина воды 18 м. Принять $C_{ск} = 1$; $C_{ин} = 2$.

Ответ: $F = 121$ кН; $\omega t = 5{,}8$.

19. Определить узловые нагрузки на вертикальный элемент *1–2–3* диаметром 1,83 м (рис. 3.34) от воздействия волн Эри высотой 9 м, длиной 135 м при глубине воды 36 м. Принять $x = 0$; $\omega t = 5{,}8$; $C_{ск} = 1$; $C_{ин} = 2$.

Ответ: $F_{1x} = 37$ кН; $M_1 = 148$ кН · м; $F_{2x} = 146$ кН; $M_2 = 242$ кН · м; $F_{3x} = 83$ кН; $M_3 = 413$ кН · м.

20. Горизонтальный элемент морского гидротехнического сооружения в виде стальной трубы наружным диаметром 0,91 м и толщиной стенки 12,7 мм находится полностью под водой и не заполнен ею внутри. Определить результирующую вертикальную нагрузку (от собственного веса и сил поддержания) на единицу длины элемента. Удельный вес стали принять равным 76 кН/м^3.

Ответ: 3,85 кН · м (вверх).

21. Наклонный элемент сооружения в виде стальной трубы наружным и внутренним диаметрами, равными соответственно 0,61 и 0,58 м, и длиной 21,55 м (рис. 3.35) находится полностью в морской воде и не заполнен ею внутри. Определить узловые нагрузки от собственного веса элемента и действующих на него сил поддержания.

Ответ: $F_{1x} = F_{2x} = 0$; $F_{1y} = F_{2y} = 8{,}3$ кН; $M_1 = -M_2 = 21{,}2$ кН · м.

22. Ледостойкое сооружение опирается на колонны наружным диаметром 4,5 м. Определить максимальную нагрузку на каждую колонну при прорезании ею ледяного поля толщиной 1,0 м. Предел прочности льда 2,0 МПа.

Ответ: 9 МН.

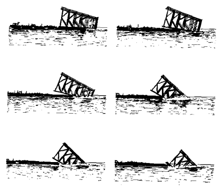
23. Слой мягкой глины мощностью 6 м наползает на шесть погруженных в грунт колонн диаметром 1,2 м. Полагая предел прочности на сдвиг у глины равным 10 кПа, определить суммарную нагрузку на колонны. Коэффициент пропорциональности N принять равным 9.

Ответ: 3,89 МН.

24. Определить максимальное значение горизонтальной нагрузки и соответствующий ей момент ωt, действующий на металлическое опорное основание от волн Эри высотой 7,5 м и длиной 105 м. Все четыре стороны сооружения одинаковые, одна из них показана на рис. 3.36. Вертикальные элементы имеют диаметр 1,22 м и стенки толщиной 3,81 см; горизонтальные и наклонные элементы имеют диаметр 0,61 м и стенки толщиной 1,27 см. Принять $C_{ск} = 1$; $C_{ин} = 2$.

25. Определить узловые нагрузки от волн при условиях, заданных в задаче 24.

26. Определить узловые нагрузки от собственного веса и сил поддержания для сооружения, рассмотренного в задаче 24, полагая горизонтальные и наклонные элементы незаполненными водой.



Процесс спуска ферменного основания.

4. МЕТОДЫ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

В главе 3 излагались методы инженерного описания основных воздействий окружающей среды на гидротехнические сооружения континентального шельфа. Максимальные значения нагрузок от этих воздействий, соответствующие конкретным условиям в районе эксплуатации сооружения, могут быть использованы в расчетах методами строительной механики, описанными в главе 2, для определения способности проектируемого сооружения противостоять внешним воздействиям. *В таком представлении о работе сооружения не учитываются инерционные* силы, возникающие из-за ускорений элементов сооружения при обычно изменяющихся во времени нагрузках; в связи с этим расчет сооружения называется *статическим.* Настоящая глава посвящена описанию деталей этого вида расчета применительно к стальным и бетонным сооружениям. Рассматриваются также вопросы, связанные с наружным давлением воды на цилиндрические элементы и с разрушением узловых соединений; они могут иметь особое значение при оценке эффекта от *динамического* характера воздействий.

4.1. Расчетные воздействия окружающей среды

Проектирование гидротехнических сооружений на континентальном *шельфе находится в зависимости от разнообразных* неблагоприятных воздействий окружающей среды. Для большинства сооружений наиболее опасные нагрузки возникают в условиях экстремального шторма в районе эксплуатации сооружения. Исключения возможны в полярных районах, где причиной разрушения сооружений могут стать обширные поля плавающего льда, или в сейсмически активных районах, где наибольшую опасность могут представить землетрясения, но все-таки в большинстве случаев наиболее неблагоприятные нагрузки возникают *при штормовых условиях.*

За расчетные обычно принимаются экстремальные штормовые условия, имеющие повторяемость один раз в 100 лет. Параметры расчетного ветра *назначаются в соответствии с методами, приведенными в главе 3.* Поверхностные волны, учитываемые в статических расчетах обычно характеризуются максимальной высотой и длиной регулярного волнения. Назначение этих параметров может быть учтено при более детальном

Таблица 4.1. **Расчетные значения параметров шторма и возвышения платформы, принимаемые для отдельных морских районов США [34]**

Район	Высота волны, м	Длина волны, м	Возвышение платформы над водой, м	Скорость ветра, м/с
Мексиканский залив	21	250	14,5	45
Залив Кука (Аляска)	18	240	17,0	45
Пролив Св. Барбары (Калифорния)	14	220	11,5	34

изучении конкретных условий [1]. В табл. 4.1 приведены некоторые характеристики расчетного шторма, принятые для отдельных прибрежных районов США.

Помимо назначения расчетных параметров ветрового и волнового воздействий необходимо учесть возможные в районе эксплуатации сооружения морские приливы, возникающие как в результате шторма, так и под влиянием притяжения Луны. Это требуется для того, чтобы назначить такое возвышение верхнего строения над уровнем моря, при котором маловероятно воздействие на него штормовых волн. Типичные возвышения платформы указаны в табл. 4.1 вместе с данными о высоте волн. Для Мексиканского залива указанное возвышение отсчитывается от нижнего уровня воды, отмечаемого при приливно-отливных явлениях, а для залива Кука и пролива Св. Барбары, где колебания уровня при приливах носят более сложный характер, – от уровня, находящегося ниже нижнего уровня отлива.

Наконец, на основании изучения местных условий должны быть оценены расчетные скорости течения, которые следует добавить к скоростям движения воды, вызванного волнением. Особую роль может играть дрейфовое течение, связанное с действием штормового ветра на водную поверхность. В некоторых районах могут иметь значение также течения, связанные с приливами и речным стоком.

4.2. Расчеты стальных сооружений морского шельфа как рамных систем

Стальные сооружения морского шельфа обычно имеют опорные основания пирамидальной формы, как это было показано в главе 1. Характерный пример такого сооружения приведен на рис. 4.1. Оно представляет собой стальное опорное основание, которое собирается на берегу, буксируется к месту постановки на грунт, устанавливается в вертикальном положении и закрепляется в грунте с помощью трубчатых свай, забиваемых в грунт через полые колонны опорного основания; вслед за этим на опорное основание устанавливается готовое верхнее строение – платформа с оборудованием.

Опорное основание обычно собирается из цилиндрических стальных элементов, используемых как для вертикальных колонн, так и для

поперечных связей. Опорные колонны обычно вертикальные за исключением расположенных по внешнему контуру, которые, как правило, наклонены, с тем чтобы создать в нижней части опорного основания уширение, способствующее сопротивляемости сооружения воздействию горизонтальных нагрузок. Обычно отклонение колонн от вертикали невелико, не более 10°, что не затрудняет постановку опорного основания на морское дно. Использование свай преследует две цели: во-первых, обеспечить передачу на грунт вертикальных нагрузок от верхнего строения и, во-вторых, придать сооружению устойчивость от воздействия горизонтальных нагрузок. В качестве свай обычно применяются стальные трубы диаметром от 1,2 м и более при толщине стенки от 25 мм и более. Для надежной передачи нагрузок на грунтовое основание сваи приходится заглублять в него на 60 м и более.

Для расчета проектируемого опорного основания с целью определения его способности противостоять действиям окружающей среды сначала с помощью методов, изложенных в главе 3, оцениваются максимальные нагрузки от ветро-волновых и других воздействий, затем эти нагрузки складываются с эксплуатационными и устанавливаются максимальные суммарные нагрузки на сооружение. Если учесть, что динамический характер внешних воздействий не имеет существенного значения (см. параграф 4.10), эти нагрузки могут быть использованы в качестве расчетных при определении методами строительной механики, изложенными в главе 2, максимальных значений напряжений в отдельных элементах сооружения. Если размеры элементов назначены удовлетворительно, напряжения окажутся в допустимых пределах.

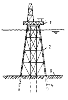


Рис. 4.1. Металлическая буровая платформа на опорном основании ферменного типа.

1 – верхнее строение; *2* – опорное основание; *3* – дно моря; *4* – сваи.

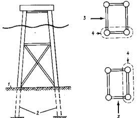


Рис. 4.2. К построению расчетной схемы опорного основания.

1 – дно моря; *2* – эквивалентные сваи; *3* – направление движения волн; *4* – плоская рама, принимаемая для расчета.

Для оценки напряжений часто оказывается достаточно рассмотреть только два случая, в которых волновое воздействие направлено параллельно одной или другой плоскостей симметрии сооружения; при этом можно ограничиться двухмерными расчетными схемами в виде плоских рамных систем (рис. 4.2). Элементы, оказавшиеся вне плоской системы, могут быть учтены путем включения в расчет равнодействующих от приложенных к ним распределенных нагрузок и упрощенного представления о закреплении их концов. Конечно, когда это диктуется геометрией сооружения или необходимостью получения более точных результатов расчета, может быть рассмотрена трехмерная схема при любом направлении ветро-волнового воздействия. Проведение таких расчетов возможно на микрокалькуляторах и при полной автоматизации подсчета *нагрузок и определения реакции сооружения на эти нагрузки.*

Напряжения в элементах сооружения должны, как было показано выше, рассчитываться с учетом взаимодействия сооружения со свайным основанием. Особенно важно это обстоятельство в случаях, когда сооружение опирается на мягкие грунты, и сваи на уровне поверхности грунта могут получить существенные смещения и повороты. В расчетной схеме (см. рис. 4.2) сваи могут быть представлены в виде эквивалентных свай – стоек, защемленных понизу и имеющих жесткостные характеристики на уровне поверхности грунта, приблизительно одинаковые с теми, которыми обладают действительные сваи, погруженные в грунт. Включение этих структурных элементов в схему опорного основания позволяет проводить совместный расчет сооружения и свайного основания методами, изложенными в главе 2 (см. пример 2.4–3). Рекомендации по определению жесткостных характеристик эквивалентных свай содержатся в главе 5.

После определения размеров элементов, обеспечивающих сооружению способность противостоять воздействиям окружающей среды в условиях эксплуатации, должен быть проведен расчет на нагрузки, возникающие в процессе транспортировки и последующей постановки сооружения на морское дно. Опорное основание пирамидальной формы обычно собирают в положении лежа и затем перемещают по горизонтали с берега на баржу, на которой оно буксируется к месту постановки на дно, спускается с нее и устанавливается в вертикальном положении. В ходе этих операций сооружение испытывает различные виды нагрузок,

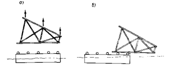


Рис. 4.3. Схемы нагружения опорного основания: *а* – при погрузке на баржу; *б* – при сдвигании в воду.

из которых особо выделяются две: одна возникает при погрузке опорного основания на баржу, другая – при спуске его с баржи в воду. Нагрузки в ходе подъема на баржу зависят от способа и схемы подъема (рис. 4.3, *а*), а нагрузки при спуске в воду зависят от возникающих при этом условий опирания. Наиболее неблагоприятным оказывается момент, когда верхняя часть опорного основания наклоняется к воде, а в целом сооружение опирается только на один каток (рис. 4.3, *б*). В обоих случаях нагрузки зависят от веса сооружения, и для подсчета напряжений в элементах могут быть использованы методы, приведенные в главе 2. В определенных случаях могут иметь значение инерционные силы, возникающие при спуске сооружения в воду, и их учет возможен с помощью методов, данных в главе 6.

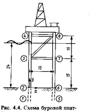


Рис. 4.4. Схема буровой платформы на стальном опорном основании.

Если в отдельных элементах или группах элементов при установке опорного основания возникают бо́льшие напряжения, то размеры этих элементов следует увеличить, а затем должна быть сделана проверка достаточности новых размеров для безопасной работы сооружения при изменившихся нагрузках. Необходимость перерасчета сооружения на нагрузки от воздействий окружающей среды объясняется тем, что увеличение размеров элементов влечет и увеличение самих нагрузок.

Вопросы расчета стальных опорных оснований рассматриваются здесь применительно к конструкциям, имеющим пирамидальную форму. Тем не менее основные выводы и рекомендации применимы и к стальным конструкциям других типов, таких как ледостойкая или гравитационная, которые были описаны в главе 1. Конечно, такие сооружения отличаются от пирамидального основания по способу опирания на грунт, также как и по нагрузкам, возникающим в процессе транспортировки и опускания на дно, но основные расчетные положения распространяются и на них. Общие указания и специфические рекомендации по расчету стальных опорных оснований буровых платформ даны в [34, 41].

Пример 4.2–1. Рассмотрим стальное основание буровой платформы (рис. 4.4) и определим напряжения в элементе *3–8*. Расчетная волна имеет высоту 6,0 м и длину 90 м, и полагается, что направление распространения волн параллельно стороне сооружения, изображенной на рисунке. Глубина воды во время шторма 24 м. Все вертикальные элементы опорного основания имеют внешний диаметр 1,22 м и стенки толщиной 38 мм *(здесь имеются в виду как опорные колонны, так и забитые* через них сваи). Горизонтальные и наклонные элементы имеют внешний диаметр 0,61 м и стенки толщиной 12,7 мм. Все четыре стороны опорного основания одинаковы, причем на фронтальной (по отношению к волне) и тыловой сторонах наклонные элементы присоединены к узлам *3* и *7*. Верхнее строение весит 2224 кН, а действующая на него ветровая нагрузка оценена в 444 кН.

Как рекомендовалось ранее, действительные сваи, находящиеся ниже поверхности морского дна, заменяются эквивалентными – стойками, защемленными понизу и имеющими жесткостные характеристики на уровне поверхности грунта, которые отвечают характеристикам действительных свай в грунте. В данной задаче эти характеристики принимаются (см. пример 5.6–2) равными:

$$[K]_{1-2}=10^4\begin{bmatrix}70{,}2 & 0 & -143\\ 0 & 68{,}8 & 0\\ -143 & 0 & 388\end{bmatrix};\quad [K]_{5-6}=10^4\begin{bmatrix}72{,}1 & 0 & -146\\ 0 & 68{,}8 & 0\\ -146 & 0 & 393\end{bmatrix}.$$

(Значения коэффициентов жесткости в этих матрицах соответствуют размерности длин и усилий соответственно в метрах и килоньютонах.)

Отметим, что схема сооружения и расчетная волна здесь такие же, как в рассмотренных ранее примерах 3.7–1 и 3.8–1, где узловые нагрузки от волнового воздействия, а также от сил веса и поддержания были подсчитаны для момента, когда общая волновая нагрузка на сооружение

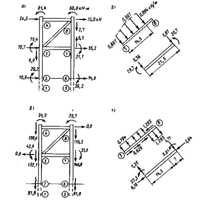


Рис. 4.5. Схемы нагружения: *а*, *б* – от волнового воздействия на опорное основание и отдельный элемент *3–8*; *в*, *г* – от собственного веса, сил поддержания в опорном основании и в элементе *3–8*.

достигает максимума. Это предположение, естественное при подсчете узловых усилий, и полученные ранее результаты можно использовать в настоящих расчетах (при этом узлы *1*, *2*, *3* и *4*, *5*, *6* здесь нумеруются иначе – как *2*, *3*, *4* и *6*, *7*, *8*, соответственно). Узловые нагрузки от волнового воздействия показаны на рис. 4.5, *а*; нагрузки от сил веса и поддержания – на рис. 4.5, *в*. На рис. 4.5, *б*, *г* показаны нагрузки, приходящиеся на отдельный элемент *3–8*.

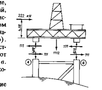


Рис. 4.6. Нагрузки от верхнего строения.

Вес верхнего строения и действующие на него ветровые нагрузки передаются на опорное основание через верхние узлы (на рассматриваемой стороне рамы – через узлы *4* и *8*). Полагается, что вес платформы (2224 кН) и ветровая нагрузка (444 кН) делятся поровну между обеими боковыми сторонами сооружения. Таким образом, на рассматриваемую боковую сторону действуют нагрузки от верхнего строения, изображенные на рис. 4.6. При этом предполагается также, что на каждую опору действуют одинаковые ветровые нагрузки, а моменты, которые могут возникнуть в узлах крепления верхнего строения к опорам, не учитываются. Жесткость узлов, к которым присоединено верхнее строение, и изгибающие моменты, которые могут возникнуть в них, здесь не принимаются во внимание.

Суммируя полученные результаты, можно найти узловые нагрузки на опорное основание от воздействия ветра, волн, собственного веса, сил поддержания и веса верхнего строения (табл. 4.2).

Для расчета сооружения на заданные узловые нагрузки составляется матричное уравнение, связывающее эти нагрузки с неизвестными узловыми перемещениями, в соответствии с положениями главы 2 (см. в частности, пример 2.4–3). Решение этого матричного уравнения представлено в табл. 4.3, где u, v и θ обозначают соответственно горизонтальное, вертикальное и угловое перемещения узла.

По найденным узловым перемещениям с помощью матриц жесткости отдельных элементов вычисляются внутренние усилия, действующие по концам элементов. В частности, для элемента *3–8* суммарные внутренние усилия, действующие по его концам, определяются из выражения $\{f^{\Sigma}\} = [K]_{3-8}\,\{u\}$.

Таблица 4.2. **Узловые нагрузки**

Узел	F_x, кН	F_y, кН	M, кН·м
2	10,9	–81,8	29,2
3	69,9	–142,0	31,5
4	135,5	–598,4	–46,5
6	14,9	–81,8	39,2
7	55,2	–140,3	42,7
8	124,8	–740,9	–96,5

Таблица 4.3. Узловые перемещения

Узел	u, м	v, м	θ, рад
2	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}54 \cdot 10^{-3}$	$1{,}95 \cdot 10^{-3}$
3	$44{,}5 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}69 \cdot 10^{-3}$	$1{,}84 \cdot 10^{-3}$
4	$51{,}6 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}01 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}22 \cdot 10^{-3}$
6	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}05 \cdot 10^{-3}$	$1{,}91 \cdot 10^{-3}$
7	$43{,}8 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}74 \cdot 10^{-3}$	$1{,}85 \cdot 10^{-3}$
8	$50{,}9 \cdot 10^{-3}$	$-3{,}36 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}27 \cdot 10^{-3}$

Выполнив операцию умножения матриц, получим:

$$f_{3x}^{\Sigma} = -433 \text{ кН}; \quad f_{3y}^{\Sigma} \approx -437 \text{ кН}; \quad m_3^{\Sigma} = 50{,}8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$f_{8x}^{\Sigma} = 433 \text{ кН}; \quad f_{8y}^{\Sigma} = 437 \text{ кН}; \quad m_8^{\Sigma} = 8{,}0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эти усилия являются суммой действительных и эквивалентных узловых усилий. Последние показаны на рис. 4.5. Далее, разложив суммарные усилия на составляющие вдоль и поперек оси элемента и вычтя из

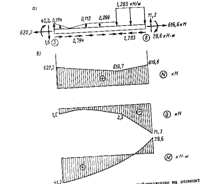


Рис. 4.7. Внешние и внутренние усилия, действующие на элемент *3–8* (*а*), и построенные по ним эпюры внутренних усилий M, Q, N (*б*).

них соответствующие эквивалентные узловые усилия, получим действительные усилия, действующие по концам элемента (рис. 4.7). На рисунке изображены также внешние распределенные нагрузки от волн, собственного веса и сил поддержания, действующие на элемент, а кроме того эпюры внутренних усилий – продольной и поперечной силы, изгибающего момента.

Как видно, максимальные продольные силы и изгибающие моменты в элементе *3–8* возникают около узла *3*. Соответствующие им нормальные напряжения

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{622}{23{,}6 \cdot 10^{-3}} = 26{,}3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_M = \pm \frac{MR}{I} = \pm \frac{43{,}2 \cdot 0{,}304}{1{,}05 \cdot 10^{-3}} = \pm 12{,}5 \text{ МПа}.$$

Максимальные (растягивающие) нормальные напряжения равны 26,3 + + 12,5 = 38,8 МПа.

Пример 4.2–2. Определим максимальные нормальные напряжения, возникающие в горизонтальном элементе фронтальной стороны опорного основания, рассмотренного в предыдущем примере. Пусть этот элемент присоединяется к узлу *3* и обозначается, например, *3–11*. Суммарные горизонтальные и вертикальные составляющие волновой нагрузки на такой элемент были определены в примере 3.7–1 и равны соответственно $F_x = 14{,}14$ кН и $F_y = -3{,}82$ кН. Результирующая от собственного веса и силы поддержания на этом элементе, определенная в примере 3.8–1, равна $F_y = 17{,}12$ кН. Суммируя эти усилия, получаем составляющие $F_x = 14{,}14$ кН и $F_y = 13{,}30$ кН. Равнодействующая их $F = \sqrt{14{,}14^2 + 13{,}30^2} = 19{,}41$ кН.

Поскольку нагрузки от волн и поддержания распределены по длине элемента равномерно, интенсивность нагрузки $f = 19{,}41/15{,}2 = 1{,}277$ кН/м.

Полагая, что элемент закреплен на концах только от линейных смещений (т. е. шарнирно оперт), нетрудно построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента. Максимальный изгибающий момент действует посередине длины элемента и равен 36,9 кН·м. При значениях внешнего радиуса и момента инерции поперечного сечения элемента, равных соответственно $R = 0{,}304$ м и $I = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$ м^4, получим максимальное нормальное напряжение в элементе

$$\sigma = \frac{MR}{I} = \frac{36{,}9 \cdot 0{,}304}{1{,}05 \cdot 10^{-3}} = 10{,}7 \text{ МПа}.$$

4.3. Увеличение напряжений, обусловленное продольным изгибом

Если элементы сооружений подвергаются изгибу и осевым нагрузкам (что обычно и происходит), нормальные напряжения от изгибающего момента, определенные на основании расчетов методами

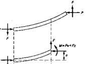


Рис. 4.8. Увеличение изгибающего момента при продольном изгибе.

строительной механики в матричной форме, содержат в себе ошибку, связанную с влиянием продольных усилий на деформацию изгиба. Это явление поясняет рис. 4.8, из которого видно, что изгибающий момент в некотором сечении x элемента зависит отчасти и от продольной силы, умноженной на прогиб. Этот дополнительный момент не включен в матричные выражения главы 2, поэтому здесь необходимо выработать способ корректировки напряжений от изгиба.

При растягивающих продольных усилиях в элементе напряжение от изгиба, полученное в результате расчета, должно быть уменьшено на значение, связанное с продольным изгибом. Напротив, при сжимающих продольных усилиях продольный изгиб приводит к увеличению нормальных напряжений от изгиба. Если уменьшением напряжений при продольном изгибе можно пренебречь в запас прочности, то их увеличение должно быть учтено. Из механики твердого деформируемого тела известно, что указанное увеличение нормальных напряжений может быть оценено с помощью коэффициента $\alpha \geqslant 1$, определенного по формуле

$$\alpha = \frac{C_m}{1 + (\sigma_N/\sigma_{\text{кр}})}, \quad \sigma_N \leqslant 0, \tag{4.1}$$

где σ_N – нормальное напряжение от продольной силы (при сжатии отрицательное); $\sigma_{\text{кр}}$ – критическое значение нормального напряжения, при котором элемент теряет устойчивость вследствие продольного изгиба; C_m – коэффициент, зависящий от вида нагружения и изменяющийся в пределах от 0,4 до 1.

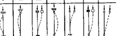
Значение C_m, равное единице, может быть принято для наиболее осторожных оценок. Точная оценка напряжений от продольного изгиба для элементов, присоединенных к жестким узлам, весьма затруднительна. Общая формула для напряжений, вызванных продольным изгибом, полученная в механике твердого деформируемого тела, имеет вид

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{(\beta l/r)^2}, \tag{4.2}$$

где E – модуль упругости (Юнга); l – длина элемента; r – радиус инерции поперечного сечения элемента; β – коэффициент приведенной или свободной длины элемента, значение которого зависит от условий закрепления его концов (табл. 4.4).

Для элементов с концами, закрепленными от сколько-нибудь существенных поперечных смещений, таких как, например, элемент 2–3 в стержневой системе на рис. 4.9, *а*, значение коэффициента β находится

Таблица 4.4. **Значения коэффициента β приведенной или свободной длины стержня**

Характеристика потери устойчивости стержня	Номер схемы						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Форма потери устойчивости стержня при продольном изгибе (штриховая линия). Закрепления оставляют свободу для относительного перемещения концов стержня							
Теоретическое значение β	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0	∞

в пределах от 0,5 (схема I в табл. 4.4) и до 1,0 (схема IV) в зависимости от жесткости существующих узловых закреплений. Таким образом, значение β, равное единице, может быть всегда принято для осторожных оценок.

Если, однако, концы элемента не имеют закреплений, достаточных для исключения поперечных смещений, как, например, у элемента 2–3 в системе на рис. 4.9, *б*, значение коэффициента β лежит в пределах от 1 (схема III) до ∞ (схема VII) в зависимости от суммарного эффекта существующих закреплений в системе. Для оценки значения β в этом последнем случае можно воспользоваться рекомендациями [12] по определению напряжений при продольном изгибе элементов, имеющих упругие опорные связи по концам. Кроме того, можно обратиться к приближенному способу определения β по номограмме на рис. 4.10.

Детальное описание номограммы приведено в [28]. Она построена в первую очередь на представлении, что основные сжатые элементы, такие как элемент 2–3 в системе на рис. 4.9, *б*, имеют одинаковые поперечные сечения и несут одинаковые сжимающие нагрузки, а все другие элементы, присоединенные к узлу, имеют идентичные поперечные сечения. При таких представлениях значение β определяется по значениям параметра

$$G = \frac{\Sigma I_c/l_c}{\Sigma I_b/l_b}, \tag{4.3}$$

отвечающим обоим узлам сжатого элемента. Здесь I_c и l_c обозначают моменты инерции поперечных сечений и длины основных сжатых элементов,

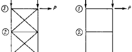


Рис. 4.9. Рамы: *а* – с раскосами для уменьшения горизонтальных перемещений; *б* – без раскосов.

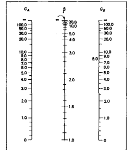


Рис. 4.10. Номограмма для определения коэффициента приведенной или свободной длины стержня.

присоединенных к рассматриваемому узлу, а I_b и l_b относятся ко всем остальным элементам, присоединенным к узлу. По вычисленным значениям параметра G для концов A и B элемента значение β находится по номограмме путем проведения прямой, соединяющей соответствующие значения G_A и G_B. Если прикрепление элемента к фундаменту исключает возможность поворота, параметр G равен нулю; если же прикрепление оставляет свободу для поворота, значение G бесконечное.

После определения коэффициента β для сжатоизогнутого элемента может быть подсчитан и коэффициент α по формуле (4.1).

Затем нормальные напряжения от изгиба, которые вычислены на основании расчетов, выполненных в матричной форме, могут быть скорректированы умножением на полученное значение коэффициента α.

Пример 4.3–1. Рассмотрим стальную конструкцию на рис. 4.11 и определим откорректированные значения нормального напряжения от изгиба в элементах *1–2* и *2–3*. Пусть все вертикальные элементы системы имеют характеристики $A = 0{,}139$ м^2; $I = 24{,}8 \cdot 10^{-3}$ м^4; все остальные элементы имеют $A = 0{,}0236$ м^2 и $I = 1{,}025 \cdot 10^{-3}$ м^4. Длина вертикальных элементов 15,2 м, горизонтальных 9,1 м, наклонных 17,6 м. Кроме того, пусть значения нагрузок P и F таковы, что в элементе *1–2* напряжения от продольной силы и от изгибающего момента равны соответственно $\sigma_N = -55{,}2$ МПа, $\sigma_M = \pm 82{,}8$ МПа; а в элементе *2–3* аналогичные напряжения имеют следующие значения: $\sigma_N = -55{,}2$ МПа; $\sigma_M = \pm 55{,}2$ МПа.

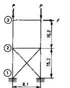


Рис. 4.11. Схема конструкции к примеру 4.3–1.

Элемент *1–2* сжат и закреплен в узлах от горизонтальных смещений, поэтому в формуле (4.2) для него можно принять $\beta = 1$. Тогда при $E = 210$ ГПа и $r = \sqrt{24{,}8 \cdot 10^{-3}/0{,}139} = 0{,}422$ м получим для этого элемента

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3}{(15{,}2/0{,}422)^2} = 1597 \text{ МПа}.$$

Напряжение от продольной силы задано равным $-55{,}2$ МПа, следовательно, $\sigma_N/\sigma_{кр} = -0{,}035$. Принимая в выражении (4.1) коэффициент C_m равным единице, получим далее, что $\alpha = 1{,}04$. Так как нормальное напряжение от изгиба (без учета продольного изгиба) равно $\pm 82{,}8$ МПа, его откорректированное значение $\sigma_M = 1{,}04(\pm 82{,}8) = \pm 86{,}2$ МПа.

Элемент *2–3* также сжат, но не имеет достаточных закреплений от горизонтальных смещений концов. Значение β можно определить по номограмме на рис. 4.10, для чего сначала по формуле (4.3) вычисляются следующие параметры:

для узла *2*

$$G_2 = \frac{24{,}8 \cdot 10^{-3}/15{,}2 + 24{,}8 \cdot 10^{-3}/15{,}2}{1{,}025 \cdot 10^{-3}/9{,}1 + 1{,}025 \cdot 10^{-3}/17{,}6} = 19;$$

для узла *3*

$$G_3 = \frac{25 \cdot 10^{-3}/15{,}2}{1{,}025 \cdot 10^{-3}/9{,}1} = 15.$$

Принимая $G_A = G_2$ и $G_B = G_3$ по номограмме получим $\beta = 3{,}8$, а затем по формуле (4.2) найдем

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3}{(3{,}8 \cdot 15{,}2/0{,}422)^2} = 110 \text{ МПа}.$$

По этому значению находим отношение $\sigma_N/\sigma_{кр} = -0{,}502$ и далее $\alpha = 2{,}0$. Откорректированное с учетом продольного изгиба значение нормального напряжения от изгиба равно в элементе *2–3*: $\sigma_M = 2(\pm 55{,}2) = \pm 110{,}4$ МПа.

4.4. Напряжения в стальных цилиндрических элементах от наружного давления

Всестороннее обжатие погруженных в воду полых цилиндрических элементов, не заполненных водой, и вызванные этим напряжения в элементах не принимались во внимание в предшествующем изложении. Наружное давление может быть просто гидростатическим или являться суммой гидростатического и связанного с волновым воздействием.

Свободный цилиндрический элемент

Рассмотрим сначала идеализированный случай незакрепленного цилиндрического элемента, подверженного результирующему наружному давлению $p = p_R - p_r$, где p_R и p_r означают соответственно интенсивности давления на наружной и внутренней сторонах цилиндра. Внутренний радиус цилиндра равен r, толщина стенки δ, а длина l (рис. 4.12, *а*).

Если рассечь цилиндр по диаметральной плоскости (рис. 4.12, *б*), то уравнение равновесия (проекция сил на вертикальную ось) запишется как

$$-2N_\theta - \int_0^l \int_0^\pi p(r+\delta)\sin\theta \, d\theta \, dz = 0.$$

Полагая стенку тонкой, т. е. $\delta/r \ll 1$, получим $N_\theta = -lrp$. Разделив полученное тангенциальное усилие на площадь сечения $l\delta$, получим значение нормального тангенциального (или окружного) напряжения

$$\sigma_\theta = -pr/\delta. \qquad (4.4)$$

Помимо этого напряжения в цилиндре возникает равномерно распределенное нормальное осевое напряжение σ_z от сжимающих усилий, обусловленных наружным давлением на днища цилиндрического элемента. Так как сжимающая нагрузка, действующая в стенке вдоль оси цилиндра, равна $p\pi r^2$, а площадь поперечного сечения его $2\pi r\delta$, получаем

$$\sigma_z = -\frac{\pi r^2 p}{2\pi r\delta} = -\frac{pr}{2\delta}. \qquad (4.5)$$

Из механики твердого деформируемого тела известны следующие соотношения между деформациями и напряжениями:

$$\epsilon_z = (1/E)(\sigma_z - \nu\sigma_\theta); \quad \epsilon_\theta = (1/E)(\sigma_\theta - \nu\sigma_z), \qquad (4.6)$$

где ϵ_z – деформация, или иначе изменение длины, отнесенное к единице длины в направлении z; ϵ_θ – деформация в тангенциальном направлении;

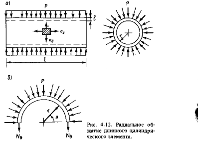


Рис. 4.12. Радиальное обжатие длинного цилиндрического элемента.

E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала соответственно. Если обозначить Δl изменение длины в направлении оси z, а u_r радиальное перемещение стенки цилиндра, направленное наружу, то

$$e_z = \frac{\Delta l}{l}; \; \epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u_r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u_r}{r}. \qquad (4.7)$$

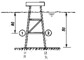


Рис. 4.13. К примеру 4.4–1.

По выражениям (4.4) – (4.7) получим следующие формулы для перемещений в осевом и радиальном направлениях стенок цилиндра:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l &= -\frac{prl}{E\delta}(0{,}5-\nu); \\ u_r &= -\frac{pr^2}{E\delta}(1-0{,}5\nu). \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Пример 4.4–1. Определим напряжения, возникающие в не заполненном водой элементе *1–2* сооружения на рис. 4.13. Элемент имеет наружный диаметр 0,62 м и толщину стенки 12 мм.

Гидростатическое давление, действующее на наружную сторону цилиндрического элемента, равно

$$p_R = \gamma h_0 + p_a,$$

где γ – удельный вес воды; h_0 – заглубление элемента ниже поверхности воды; p_a – атмосферное давление. Если в не заполненном водой элементе давление равно атмосферному, то результирующее наружное давление имеет интенсивность $p = p_R - p_a = \gamma h_0 = 0{,}6$ МПа.

Используя выражения (4.4) и (4.5), получаем при $r = 0{,}3$ м, $\delta = 0{,}012$ м и $p = 0{,}6$ МПа

$$\sigma_\theta = -\frac{0{,}6 \cdot 0{,}3}{0{,}012} = -15 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z = -\frac{0{,}6 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 0{,}012} = -7{,}5 \text{ МПа}.$$

Пример 4.4–2. Рассмотрим пример 4.4–1 при условии воздействия волн высотой 21 м и длиной 300 м.

Полагая справедливой теорию волн Эри, найдем наружное давление на элемент по формуле (3.15)

$$p = \frac{\gamma H}{2} \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} kh} + \gamma(h - y),$$

где H – высота волны; k – волновое число; h – глубина воды; y – расстояние от морского дна до элемента; γ – удельный вес воды. Подставляя $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/300$; $H = 21$ м; $y = 30$ м, $\gamma = 10$ кН/м^3 и $h = 90$ м, найдем $p = 0{,}0375 + 0{,}6 = 0{,}6375$ МПа.

Далее по формулам (4.4) и (4.5) получим $\sigma_\theta = -16$ МПа и $\sigma_z = -8$ МПа.

Закрепленный цилиндрический элемент

Выше полагалось, что радиальные перемещения постоянны по всей длине цилиндрического элемента. Имеющиеся по концам элемента закрепления противоречат этому предположению. Чтобы оценить влияние закреплений цилиндрического элемента, необходимо рассмотреть изгиб полосы, выделенной вдоль его оси (рис. 4.14).

Будем рассматривать в частности тонкостенный цилиндрический элемент радиусом r и толщиной стенки δ. Выделенная из него продольная полоса имеет ширину $r d\theta$. Представляя полосу как балку, подвергнутую изгибу, найдем из теории изгиба балок, что продольная деформация ее равна

$$\epsilon_z = -y \frac{d^2 u_r}{dz^2}, \tag{4.9}$$

где y – расстояние, измеряемое в радиальном направлении (положительное y направлено в наружную сторону от срединной поверхности); u_r – перемещение в том же направлении, соответствующее продольной координате z. Если полоска подвергнута кроме изгиба сжатию или растяжению в продольном направлении, то следует добавить к деформациям, обусловленным изгибом, деформации от продольных сил ϵ_{z0}, т. е. полная деформация определится как

$$\epsilon_z = -y \frac{d^2 u_r}{dz^2} + \epsilon_{z0}. \tag{4.10}$$

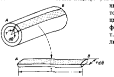


Рис. 4.14. Полоса, выделенная из цилиндрического элемента.

Кроме деформации в продольном направлении, имеются, как известно, тангенциальные деформации, определяемые в соответствии с (4.7) формулой

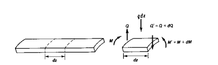


Рис. 4.15. Внутренние усилия в полосе, выделенной из цилиндрического элемента.

$$\epsilon_\theta = u_r / r. \tag{4.11}$$

Подставив приведенные здесь выражения деформаций в соотношения (4.6) между деформациями и напряжениями, найдем нормальные тангенциальное и осевое напряжения в полосе

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u_r}{r} - \nu y \frac{d^2 u_r}{dz^2} + \nu\epsilon_{z0}\right); \tag{4.12}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-y \frac{d^2 u_r}{dz^2} + \epsilon_{z0} + \nu \frac{u_r}{r}\right). \tag{4.13}$$

Остается определить выражение для радиального перемещения u_r. Найдем сначала изгибающий момент, отнесенный к единице ширины полосы. Используя правило знаков, показанное на рис. 4.15, будем иметь

$$M = -\int_{-\delta/2}^{\delta/2} y \sigma_z dy. \tag{4.14}$$

Подставив сюда выражение (4.13), найдем

$$D \frac{d^2 u_r}{dz^2} = M, \tag{4.15}$$

где

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Обозначив q вертикальную нагрузку, приходящуюся на единицу площади полосы, получим из условий равновесия элементарного отрезка полосы на рис. 4.15, что

$$\frac{dQ}{dz} = -q; \quad \frac{dM}{dz} = Q, \tag{4.16}$$

где Q – поперечная сила, отнесенная к единице ширины полосы.

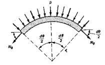


Рис. 4.16. Усилия, действующие на элементарный участок кольцевой полосы, выделенной из цилиндра.

Исключив Q из последних двух уравнений и использовав формулу (4.15), получим

$$D\frac{d^4 u_r}{dz^4} = -q. \tag{4.17}$$

Наконец, необходимо связать нагрузку q с наружным давлением p. Из условия равновесия элементарного отрезка, выделенного из цилиндра по окружности (рис. 4.16) найдем, что

$$q r d\theta = p r d\theta + N_\theta\, d\theta \tag{4.18}$$

или

$$q = p + (1/r) N_\theta ,$$

где

$$N_\theta = \int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_\theta\, dy.$$

Подставив сюда выражение (4.12), получим

$$N_\theta = \frac{E\delta}{1-\nu^2}\left(\frac{u_r}{r} + \nu e_{z0}\right) . \tag{4.19}$$

Кроме того, если σ_{z0} означает нормальное осевое напряжение, определяемое по (4.5), то, полагая $y = 0$ в выражении (4.13), найдем

$$e_{z0} = \frac{1-\nu^2}{E}\,\sigma_{z0} - \nu\frac{u_r}{r} . \tag{4.20}$$

Теперь из выражений (4.17) – (4.20) получим уравнение для радиального перемещения вдоль оси цилиндра

$$D\frac{d^4 u_r}{dz^4} + \frac{E\delta}{r^2}\, u_r = -p', \tag{4.21}$$

где $p' = p + \nu(\delta/r)\sigma_{z0}$.

Решения уравнения (4.21) при постоянном p' можно представить в виде

$$u_r = e^{-az}(C_1 \cos az + C_2 \sin az) + e^{az}(C_3 \cos az + C_4 \sin az) - \frac{p' r^2}{E\delta} , \tag{4.22}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 – произвольные постоянные, а

$$a = \left(\frac{E\delta}{4r^2 D}\right)^{1/4} = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{r^2\delta^2}\right]^{1/4} . \tag{4.23}$$

Постоянные в выражении (4.22) определяются из условий закрепления концов цилиндрического элемента. Если концы его закреплены от линейных перемещений и поворота, то для них $u_r = du_r/dz = 0$.

Значительный интерес представляет случай полубесконечного элемента с защемленным концом (рис. 4.17). Из условия ограниченности радиального перемещения при $z \to \infty$ найдем, что $C_3 = C_4 = 0$. Кроме того, из условия, что при $z = 0$ $u_r = du_r/dz = 0$, получим $C_1 = C_2 = p' r^2/E\delta$.

Таким образом, радиальное перемещение

$$u_r = \frac{p' r^2}{E\delta}\,[\,1 - e^{-az}(\cos az + \sin az)] , \tag{4.24}$$

где $p' = p + \nu(\delta/r)\sigma_{z0} = p(1 - 0{,}5\nu)$.

С увеличением значения az радиальное перемещение сближается с получаемым из выражения (4.8), что указывает на локальность краевого эффекта. Если элемент достаточно длинный (скажем, при $l > 6/a$), полученное решение может быть использовано для нахождения перемещений в окрестности концов цилиндра, когда оба они защемлены.

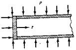


Рис. 4.17. Концевая часть цилиндрического элемента.

После того как становятся известными радиальные перемещения, могут быть вычислены напряжения с помощью формул (4.12), (4.13) и (4.20). Если иметь в виду только внешнюю и внутреннюю поверхности цилиндра

($y = \pm\,\delta/2$), эти формулы можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{pr}{2\delta} \pm \frac{3pr\,(2-\nu)\kappa}{2\delta}\, e^{-az}\,(\cos az - \sin az);\\ \sigma_\theta &= -\frac{pr}{\delta} + \frac{pr\,(2-\nu)}{2\delta}\, e^{-az}[(1 \pm 3\nu\kappa)\cos az + (1 \mp 3\nu\kappa)\sin az)],\end{aligned}\right\} \tag{4.25 а}$$

где $\kappa = [\,3(1-\nu^2)\,]^{-1/2}$.

Кроме нормальных напряжений имеются также касательные напряжения, связанные с радиальной поперечной силой Q, определяемой по формулам (4.15), (4.16) и (4.24), как

$$Q = D\frac{d^3 u_r}{dz^3} = \frac{p(2-\nu)}{2a}\, e^{-az}\cos az.$$

Если, как в теории изгиба балок, касательные напряжения считать распределенными по толщине стенки по параболическому закону, то максимальные значения этих напряжений должны находиться в срединной поверхности, они равняются $3Q/2\delta$. Таким образом, касательное, действующее в радиальном направлении, напряжение может быть найдено по формуле

$$\tau = \frac{3}{4}\,\frac{p(2-\nu)}{a\delta}\, e^{-az}\cos az. \tag{4.25 б}$$

Положительные τ совпадают по направлению с усилием Q на рис. 4.15.

Исследование полученных выше выражений показывает, что максимальные нормальные и касательные напряжения должны быть у закрепленных концов цилиндра. При этом максимальные нормальные напряжения появляются на внешней и внутренней поверхностях цилиндра, где касательные напряжения отсутствуют, и, наоборот, максимальные касательные напряжения появляются в срединной поверхности цилиндра, где нормальные осевые напряжения минимальны и соответствуют значению, определяемому по формуле (4.5). Максимальные нормальное осевое, касательное радиальное и нормальное тангенциальное напряжения можно вычислять по формулам

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{pr}{2\delta}\quad 1 \mp \frac{\sqrt{3(2-\nu)}}{(1-\nu^2)^{1/2}}\quad \text{при } y = \pm\frac{\delta}{2};\\ \sigma_\theta &= \nu\sigma_z;\\ \tau &= \frac{3}{4}\,\frac{(2-\nu)p}{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}\,\sqrt{\frac{r}{\delta}}\quad \text{при } y = 0.\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Принимая $\nu = 0{,}3$, что типично для сталей, получаем на внешней поверхности

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= 1{,}04(pr/\delta);\\ \sigma_\theta &= 0{,}313(pr/\delta)\end{aligned}\right\} \tag{4.26 а}$$

и для внутренней поверхности

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= -2{,}04(pr/\delta);\\ \sigma_\theta &= -0{,}612(pr/\delta).\end{aligned}\right\} \tag{4.26 б}$$

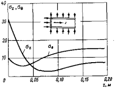


Рис. 4.18. Графики зависимостей σ_z и σ_θ от z.

На достаточном удалении от закрепленных концов из выражений (4.25 а) следует, что $\sigma_z = -(pr)/2\delta$; $\sigma_\theta = -(pr)/\delta$, и это полностью согласуется с выражениями (4.4) и (4.5).

Как и в теории изгиба балок, касательные напряжения, вычисляемые по (4.26), малы в сравнении с максимальными нормальными осевыми напряжениями и могут не приниматься во внимание при расчете стальных элементов.

Пример 4.4—3. Повторим расчеты напряжений для примера 4.4—1 при условии, что концы цилиндрического элемента закреплены от линейных перемещений и поворота.

Цилиндр имеет радиус 0,3 м и толщину стенки $\delta = 12$ мм; наружное давление равно 0,6 МПа. Полагая цилиндр выполненным из стали с $E = 210$ ГПа и $\nu = 0{,}3$, получим из выражения (4.23)

$$a^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2\delta^2} = 21{,}06\cdot 10^4,$$

т. е. $a = 21{,}4$ м$^{-1}$. Формула (4.24) применима для элементов, имеющих длину $6/a > 0{,}28$ м, следовательно, она может быть использована и в данных условиях. По формулам (4.26) при $pr/\delta = 0{,}6\cdot 0{,}3/0{,}012 = 15$ МПа определим следующие значения нормальных напряжений:

на наружной поверхности у закрепленного конца цилиндра $\sigma_z = 1{,}04\cdot 15 = 15{,}6$ МПа; $\sigma_\theta = 0{,}313\cdot 15 = 4{,}7$ МПа;

на внутренней поверхности $\sigma_z = -2{,}04\cdot 15 = -30{,}6$ МПа; $\sigma_\theta = -0{,}612\cdot 15 = -9{,}2$ МПа.

На удалении от концов $\sigma_z = -0{,}5\cdot 15 = -7{,}5$ МПа; $\sigma_\theta = -15$ МПа.

Изменение напряжений σ_z и σ_θ по длине элемента отражает выражение (4.25 а). Для внутренней поверхности элемента, где напряжения максимальные, изменение σ_z и σ_θ по длине элемента показано на графиках (рис. 4.18).

4.5. Критерий прочности для стальных элементов

Для сооружений континентального шельфа используется обычная конструкционная сталь. На рис. 4.19 показана типичная диаграмма деформации такой стали. Предел текучести конструкционной стали около 280 МПа или менее, а предел прочности около 420 МПа. Пока *напряжения в элементе сооружения не превосходят предела текучести*, его материал работает в упругой стадии, т. е. с исчезновением деформаций в нем исчезают и напряжения. Основная цель расчета состоит в определении размеров элементов, обеспечивающих соблюдение указанного положения при заданных условиях нагружения. В действительности используется коэффициент запаса для назначения допускаемых напряжений (предел текучести, деленный на коэффициент запаса) и размеры элементов определяются из условия, что при всех расчетных нагрузках напряжения в них не превысят допускаемого значения.

Допускаемые уровни нормальных осевого σ_z и тангенциального σ_θ напряжений в элементах сооружения континентального шельфа могут *быть установлены с использованием критерия максимального касательного напряжения*. Более детально этот вопрос освещен в [34]. Нормальные осевые напряжения обусловлены, вообще говоря, наружным давлением и работой элемента в составе рамной системы на нагрузки, соответствующие штормовым условиям. Нормальные тангенциальные напряжения возрастают только в связи с изменением наружного давления.

Если рассматривать нормальные осевые напряжения как сумму равномерно распределенных по сечению напряжений от продольной силы σ_N и напряжений от изгибающего момента σ_M, то согласно указанному критерию прочности расчетным условием при $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta < 0$ (или при $\sigma_z < 0$, $\sigma_\theta > 0$) будет

$$\left| \frac{\sigma_N}{[\sigma_N]} + \frac{\sigma_M}{[\sigma_M]} - \frac{\sigma_\theta}{[\sigma_\theta]} \right| \leqslant 1, \qquad (4.27)$$

а при $\sigma_z < 0$, $\sigma_\theta < 0$ (или при $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$)

$$\left| \frac{\sigma_N}{[\sigma_N]} + \frac{\sigma_M}{[\sigma_M]} \right| \leqslant 1; \quad \left| \frac{\sigma_\theta}{[\sigma_\theta]} \right| \leqslant 1, \qquad (4.28)$$

где $[\sigma_N]$, $[\sigma_M]$ и $[\sigma_\theta]$ – допускаемые значения соответствующих нормальных напряжений в условиях, когда они действуют отдельно от остальных. Эти величины назначаются в соответствии с пределом текучести $\sigma_т$ материала, значениями сжимающего нормального осевого напряжения $\sigma_{z,\,кр}$, при котором элемент *теряет устойчивость (выпучивается)*, и сжимающего нормального тангенциального напряжения $\sigma_{\theta,\,кр}$, при котором элемент теряет свою цилиндрическую форму и сплющивается.

Нормальное осевое напряжение, при котором возможно выпучивание элемента от продольного сжатия, возникает в локализованной области и может быть определено приближенно по формуле

$$\sigma_{z,\,кр} = 0{,}3E(\delta/r), \qquad (4.29)$$

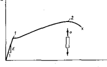


Рис. 4.19. Диаграмма деформации конструкционной стали при растяжении.

1 – предел текучести; *2* – предел прочности.

где E – модуль Юнга; δ – толщина стенки; r – радиус цилиндрического элемента. Аналогично, для элементов, не имеющих подкрепляющих колец, нормальное тангенциальное напряжение, при котором возможно сплющивание элемента, в зоне удаленной от концевых подкреплений может быть приближенно найдено по *формуле*

$$\sigma_{\theta,\,кр} = 0{,}22E(\delta/r)^2. \qquad (4.30)$$

При положительных (соответствующих растяжению) значениях σ_z и σ_θ потеря устойчивости невозможна, и допускаемые напряжения $[\sigma_N]$, $[\sigma_M]$ и $[\sigma_\theta]$ зависят только от предела текучести материала $\sigma_т$. Они устанавливаются обычно с помощью коэффициентов запаса

$$[\sigma_N] = 0{,}6\sigma_т; \quad [\sigma_M] = 0{,}67\sigma_т; \quad [\sigma_\theta] = 0{,}5\sigma_т. \qquad (4.31)$$

*При отрицательных (сжимающих) значениях σ_z и σ_θ соответствую*щие допускаемые напряжения должны назначаться с учетом возможности продольного изгиба. Рекомендуемые значения этих величин можно получить по табл. 4.5. При $\sigma_{z,\,кр}/E \geqslant 0{,}010$ и $\sigma_{\theta,\,кр}/\sigma_т \geqslant 4$ следует пользоваться формулами (4.31).

Допускаемые значения напряжений $[\sigma_N]$, $[\sigma_M]$ и $[\sigma_\theta]$, приведенные выше, относятся к случаю, когда напряжения подсчитываются без учета нагрузок от воздействий окружающей среды. Если же в расчет включаются нормальные осевые напряжения, обусловленные работой элементов в составе рамной конструкции на внешние воздействия, и дополнительно к ним нормальные тангенциальные напряжения, связанные с *увеличением наружного давления при волнении, то обычно* считается возможным увеличить значения допускаемых напряжений на одну треть.

Пример 4.5–1. Элемент *1–2* опорного основания буровой платформы (рис. 4.20) подвержен наружному гидростатическому давлению, равному на конце *1* 1,2 МПа (это соответствует глубине воды 120 м). Элемент выполнен в виде стального цилиндра радиусом 0,3 м и толщиной стенки 12 мм. Проверим прочность этого элемента, полагая предел текучести материала равным 250 МПа.

Таблица 4.5. Допускаемые напряжения

Сжимающие нормальные осевые напряжения			Сжимающие нормальные тангенциальные напряжения	
$\dfrac{\sigma_{z,\,кр}}{E}$	$\dfrac{[\sigma_N]}{\sigma_т}$	$\dfrac{[\sigma_M]}{\sigma_т}$	$\dfrac{\sigma_{\theta,\,кр}}{\sigma_т}$	$\dfrac{[\sigma_\theta]}{\sigma_т}$
$\geqslant 0{,}010$	0,60	0,67	$\geqslant 4{,}0$	0,50
0,008	0,50	0,65	3,0	0,48
0,006	0,55	0,61	2,0	0,45
0,004	0,50	0,56	1,0	0,38
0,002	0,41	0,46	$\leqslant 0{,}5$	$0{,}5\ (\sigma_{\theta,\,кр}/\sigma_т)$

С помощью формул, полученных в параграфе 4.5, определим нормальные осевые и тангенциальные напряжения на внутренней стороне элемента около узла *1*: $\sigma_z = -61{,}2$ МПа; $\sigma_\theta = -18{,}35$ МПа. На внешней поверхности в том же сечении $\sigma_z = 31{,}2$ МПа; $\sigma_\theta = 9{,}39$ МПа, а на удалении от подкрепленного конца элемента $\sigma_z = -15{,}0$ МПа; $\sigma_\theta = -30{,}0$ МПа.

Для сечения около подкрепленного конца из выражения (4.29) получим, что $\sigma_{z,\,кр}/E = 0{,}012$, следовательно, местной потери устойчивости в виде выпучивания не будет и при сжимающем напряжении σ_z (см. табл. 4.5). Возможность потери устойчивости формы поперечного сечения (сплющивания цилиндра) уменьшается еще и благодаря наличию диафрагмы на конце элемента. Итак, с помощью формул (4.31) можно установить следующие значения допускаемых напряжений для рассматриваемой зоны элемента: $[\sigma_N] = 150$ МПа; $[\sigma_M] = 167$ МПа; $[\sigma_\theta] = 125$ МПа.

Заметим теперь, что нормальное осевое напряжение σ_z на конце элемента складывается из равномерно распределенного по площади сечения напряжения σ_N от продольной силы и напряжения σ_M от изгибающего момента. Составляющая σ_N здесь такая же, как и в сечении, удаленном от конца, так что для внутренней поверхности получим $\sigma_N = -15{,}0$ МПа; $\sigma_M = -46{,}2$ МПа. Так как $\sigma_z = \sigma_N + \sigma_M < 0$ и $\sigma_\theta < 0$, должно проверяться условие (4.28)

$$\left|\frac{-15{,}0}{150} - \frac{46{,}2}{167}\right| = 0{,}37;$$

$$\left|\frac{-18{,}35}{125}\right| = 0{,}15.$$

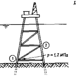


Рис. 4.20. К примеру 4.5–1.

Как видно, поставленное условие удовлетворяется.

Для наружной поверхности элемента около узла *1* найдем по аналогии с предыдущим, что $\sigma_N = -15{,}0$ МПа; $\sigma_M = 46{,}2$ МПа.

Поскольку $\sigma_z = \sigma_N + \sigma_M > 0$ и $\sigma_\theta > 0$, снова должно проверяться условие (4.28)

$$\left|\frac{-15{,}0}{150} + \frac{46{,}2}{167}\right| = 0{,}17; \qquad \left|\frac{9{,}39}{125}\right| = 0{,}07.$$

И опять это условие удовлетворяется.

Далее рассмотрим зону элемента, удаленную от закрепленного конца. Здесь из выражений (4.29) и (4.30) получим $\sigma_{z,\,кр}/E = 0{,}012$, как и ранее, и $\sigma_{\theta,\,кр}/\sigma_т = 0{,}32$. Соответствующие этому допускаемые напряжения $[\sigma_N]$ и $[\sigma_M]$ оказываются такими же, как и полученные выше, а $[\sigma_\theta]$ в соответствии с табл. 4.5 равно 40,0 МПа. Таким образом, при $\sigma_N = -15{,}0$ МПа; $\sigma_M = 0$ и $\sigma_\theta = -30{,}0$ МПа условие (4.28):

$$\left|\frac{-15{,}0}{150}\right| = 0{,}10; \qquad \left|\frac{-30{,}0}{-40{,}0}\right| = 0{,}75$$

удовлетворяется.

Пример. 4.5–2. Рассмотрим предыдущий пример при условии, что в элементе *1–2* в сечении около узла *1* действуют равномерно распределенные по сечению нормальные осевые напряжения от продольной силы 70 МПа и напряжения от изгиба 35 МПа, обусловленные ветро-волновым воздействием на сооружение. Будем полагать, что напряжение от изгибающего момента откорректировано в соответствии с рекомендациями параграфа 4.3, а увеличение наружного давления на элемент при движении волн пренебрежимо мало.

Можно считать, что нормальные осевые напряжения от продольной силы и от изгибающего момента, обусловленные воздействием волны и ветра, возникают не только у самого концевого закрепления (в узле *1*), но и на малом удалении от него, где появляются напряжения, вызванные наружным давлением. Это предположение вполне оправдано, так как осевые напряжения от продольной силы, обусловленной ветро-волновым воздействием, постоянные по всей длине элемента, а соответствующие напряжения от изгибающего момента изменяются при удалении от закрепленного конца в меньшей степени, чем напряжения от наружного давления.

Рассмотрим сначала напряжения, возникающие у закрепленного конца *1* элемента. Допускаемые напряжения здесь такие же, как и в предыдущем примере. Однако, поскольку сейчас рассматриваются напряжения, обусловленные штормовыми условиями, то значения допускаемых напряжений можно увеличить на одну треть, т. е. $[\sigma_N] = 200$ МПа; $[\sigma_M] = 222$ МПа; $[\sigma_\theta] = 167$ МПа.

На внутренней поверхности цилиндра по результатам расчетов в предыдущем примере $\sigma_N = -15{,}0$ МПа; $\sigma_M = -46{,}2$ МПа; $\sigma_\theta = -18{,}35$ МПа. Кроме того, от штормового воздействия заданы $\sigma_N = 70$ МПа; $\sigma_M = \pm\ 35$ МПа.

Для растянутой стороны элемента получим отсюда $\sigma_N = 55$ МПа; $\sigma_M = -11{,}2$ МПа, и, кроме этих напряжений, есть еще нормальное тангенциальное напряжение, указанное выше. Поскольку $\sigma_z = \sigma_N + \sigma_M > 0$ и $\sigma_\theta < 0$, должно проверяться условие (4.27)

$$\left| \frac{55}{200} - \frac{11{,}2}{222} + \frac{18{,}35}{167} \right| = 0{,}33,$$

что приемлемо.

Для сжатой стороны элемента получаем с учетом штормовых воздействий $\sigma_N = 55$ МПа; $\sigma_M = -81{,}2$ МПа. Так как здесь $\sigma_z = \sigma_N + \sigma_M < 0$ и $\sigma_\theta < 0$, должно проверяться условие (4.28)

$$\left| \frac{55}{200} - \frac{81{,}2}{222} \right| = 0{,}09; \quad \left| \frac{18{,}35}{167} \right| = 0{,}11,$$

что также приемлемо.

Рассмотрев напряжения на внешней поверхности растянутой и сжатой сторон элемента около узла *1*, найдем, что они тоже удовлетворяют условиям прочности.

Наконец, рассмотрим напряжения в сечении, удаленном от концевого закрепления. Из предыдущего примера $\sigma_N = -15{,}0$ МПа; $\sigma_M = 0$; $\sigma_\theta = -30{,}0$ МПа. Эти напряжения обусловлены наружным давлением. Для растянутой стороны элемента при штормовом воздействии имеем результирующие напряжения $\sigma_N = 55$ МПа; $\sigma_M = 35$ МПа и кроме них тангенциальные напряжения σ_θ, указанные выше. Так как $\sigma_z = \sigma_N + \sigma_M > 0$ и $\sigma_\theta < 0$, должно проверяться условие (4.27). Допускаемые напряжения $[\sigma_N]$ и $[\sigma_M]$ остаются без изменения, а $[\sigma_\theta]$ должны быть увеличены. В предыдущем примере они были равны 40,0 МПа, здесь же их можно принять на одну треть большими, т. е. $[\sigma_\theta] = 53{,}3$ МПа. Итак,

$$\left| \frac{55}{200} + \frac{35}{222} + \frac{30}{53{,}3} \right| = 0{,}99,$$

т. е. условие удовлетворяется. Аналогичная проверка для сжатой стороны элемента в сечении, удаленном от закрепленного конца, дает также удовлетворительный результат.

4.6. Кольцевые подкрепления

Из примеров раздела 4.5 видно, что критическое состояние элемента, подверженного наружному давлению, обычно связано с вызванными изгибом тангенциальными нормальными напряжениями, при которых происходит сплющивание цилиндра. В случаях, когда эти напряжения недостаточно велики по сравнению с тангенциальными

напряжениями, обусловленными наружным давлением, элемент может быть подкреплен радиальными кольцевыми ребрами жесткости (рис. 4.21). Увеличение значений тангенциального напряжения при изгибе, вызванного этим подкреплением, зависит от толщины стенки δ и радиуса цилиндра r, а также от шага колец L вдоль оси элемента. Из механики твердого деформируемого тела известно, в частности, что тангенциальное нормальное напряжение $\sigma_{\theta,\text{кр}}$, при котором происходит сплющивание цилиндра, зависит только от отношения δ/r и параметра

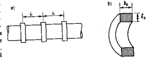


Рис. 4.21. Кольцевые подкрепления цилиндрического элемента от потери устойчивости в виде сплющивания: *а* – размещение колец по длине цилиндра; *б* – поперечное сечение кольца.

$$\beta = \frac{L}{r} \sqrt{\frac{r}{\delta}}. \qquad (4.32)$$

График на рис. 4.22 позволяет получить значения $\sigma_{\theta,\text{кр}}$ при различных значениях δ/r и β. Помимо этого графика можно воспользоваться более точными зависимостями, приведенными в [34].

Расчет подкрепляющих колец может быть основан на определении критической радиальной нагрузки q (отнесенной к единице длины окружности), при которой они теряют устойчивость. Из механики твердого деформируемого тела

$$q = \frac{3EI}{R_0^3}, \qquad (4.33)$$

где E – модуль Юнга материала кольца; R_0 – средний радиус кольца; I – момент инерции его поперечного сечения. Обозначив ширину

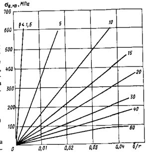


Рис. 4.22. К определению критического значения нормального тангенциального напряжения для подкрепленного цилиндрического элемента.

и высоту поперечного сечения кольца соответственно b_0 и δ_0, можно записать

$$R_0 = r + 0{,}5\delta_0; \quad I = (1/12)\, b_0 \delta_0^3. \tag{4.34}$$

Если считать, что наружное давление на цилиндрический элемент, действующее между двумя соседними кольцами, полностью воспринимается этими кольцами, то $q = pL$, где p – наружное давление на цилиндрический элемент. Принимая p в 1,5 раза большим критического наружного давления на цилиндр, т. е.

$$p = 1{,}5\sigma_{\theta,\,\text{кр}}(\delta/r), \tag{4.35}$$

из выражения (4.33) найдем минимально необходимый момент инерции поперечного сечения кольца

$$I = \frac{\delta L R_0^3}{2r E}\, \sigma_{\theta,\,\text{кр}}. \tag{4.36}$$

Пример 4.6–1. Стальной цилиндрический элемент опорного основания буровой платформы, имеющий радиус 0,3 м, толщину стенки 12 мм и предел текучести 250 МПа, испытывает наружное давление интенсивности 2,5 МПа (что соответствует его заглублению на 250 м). Необходимо определить нормальные тангенциальные напряжения и определить необходимость кольцевого подкрепления для предотвращения возможности потери устойчивости формы в виде сплющивания.

Напряжения в элементе на удалении от его концов находим по выражениям (4.4) и (4.5): $\sigma_\theta = -62{,}5$ МПа; $\sigma_z = -31{,}2$ МПа, а критическое значение напряжения, при котором наступает потеря устойчивости цилиндрической формы, по формуле (4.30): $\sigma_{\theta,\,\text{кр}} = 74{,}0$ МПа.

Таким образом, здесь $\sigma_{\theta,\,\text{кр}}/\sigma_\text{т} = 0{,}296$, и по табл. 4.5 получаем $[\sigma_\theta] = 37{,}0$ МПа. Проверяя далее условие (4.28)

$$\left| \frac{\sigma_\theta}{[\sigma_\theta]} \right| = \left| \frac{-62{,}5}{37{,}0} \right| = 1{,}69,$$

видим, что оно не удовлетворяется.

Чтобы увеличить критическое значение тангенциальных напряжений, предусмотрим установку кольцевых подкреплений и положим для пробы, что они размещены по длине цилиндрического элемента через 2,5 м. По формуле (4.32) получим, что при $\delta/r = 0{,}04\beta = 42$. По графику на рис. 4.22 найдем при этих значениях, что $\sigma_{\theta,\,\text{кр}} = 150$ МПа. Таким образом, $\sigma_{\theta,\,\text{кр}}/\sigma_\text{т} = 0{,}60$. Допускаемое напряжение $[\sigma_\theta]$ получаем по табл. 4.5 интерполяцией значений $[\sigma_\theta]/\sigma_\text{т}$, соответствующих отношениям $\sigma_\theta/\sigma_\text{т}$, равным 0,5 и 1. В результате найдем, что $[\sigma_\theta]/\sigma_\text{т} = 0{,}2?$ и $[\sigma_\theta] = 70$ МПа.

Проверим условие (4.28) с учетом достигнутого увеличения критического тангенциального напряжения

$$\left| \frac{\sigma_\theta}{[\sigma_\theta]} \right| = \left| \frac{-62{,}5}{70{,}0} \right| = 0{,}89,$$

что допустимо.

Для определения размеров подкрепляющего кольца, положим для пробы, что его толщина δ_0 равна 6 см, и определим соответствующую ширину b_0 по выражению (4.36). Получим (если кольцо выполнено из стали), что

$$I = \frac{0{,}012 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}33^3}{2 \cdot 0{,}3 \cdot 210 \cdot 10^3}\ 150 = 1{,}28 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^4,$$

и затем по выражению (4.34) для момента инерции поперечного сечения кольца найдем

$$b_0 = \frac{12 I}{\delta_0^3} = \frac{12 \cdot 1{,}28 \cdot 10^{-6}}{(0{,}06)^3} = 0{,}07\ \text{м}.$$

Таким образом, можно рекомендовать в данном случае использование стальных подкрепляющих колец толщиной 60 мм, шириной 70 мм внутренним диаметром 0,61 м.

4.7. Расчеты узловых соединений

Продавливание. Узлы сооружений морского шельфа образуются в местах, где боковые стержни привариваются к опорным колоннам. Рис. 4.23, *а* иллюстрирует основные детали типичного узлового соединения опорной колонны с боковыми элементами, в котором последние не перекрываются. При расчете на ветровые и волновые нагрузки считается, что усилия в боковых элементах передаются на стенку опорной колонны. Таким образом, необходимо рассмотреть возможность *продавливания* стенки опорной колонны, если ее толщина недостаточна.

Для приближенной оценки касательных напряжений, при которых возможно продавливание стенки опорной колонны присоединенным к ней боковым элементом, можно пренебречь кривизной опорной колонны и схематизировать соединение, как пересечение наклонного цилиндрического элемента с пластинкой (рис. 4.23, *б*). Контур пересечения будет в таком случае иметь форму эллипса с большой и малой осями, равными соответственно $2R_\text{Б}/\sin\theta$ и $2R_\text{Б}$, где $R_\text{Б}$ – радиус бокового элемента, а θ – угол наклона бокового элемента относительно опорной колонны (см. рис. 4.23, *а*). Таким образом, если обозначить f_x нормальную (по отношению к колонне) составляющую усилия от бокового

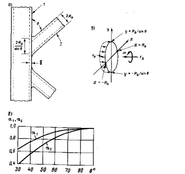


Рис. 4.23. К расчету узловых соединений: *а* – сопряжение опорной колонны (*1*) с раскосами (*2*); *б* – схема распределения напряжений; *в* – график зависимости коэффициентов α_1, α_2 от угла θ.

элемента, то касательное напряжение в стенке колонны от нормальной силы

$$\tau_{\text{п}N} = f_x/\delta C, \tag{4.37}$$

где δ – толщина стенки колонны; C – длина контура пересечения колонны с боковым элементом. Аналогично, если обозначить m момент, передаваемый боковым элементом на колонну, то соответствующее ему касательное напряжение $\tau_{\text{п}M}$ равно

$$\tau_{\text{п}M} = my/\delta I_1; \quad I_1 = \int_c y^2 ds. \tag{4.38}$$

Здесь y *измеряется* от центра эллипса (рис. 4.23, *б*). Экстремальные значения напряжения соответствуют $y = \pm R_{\text{Б}}/\sin\theta$. Сложив значения напряжений от продольной силы и от момента, передаваемых боковым элементом на колонну, получим предельное значение касательного напряжения, при котором может произойти продавливание (или вырыв) бокового элемента,

$$\tau_{\text{п}} = \alpha_1 \frac{|f_x|}{2\pi\delta R_{\text{Б}}} + \alpha_2 \frac{|m|}{\pi\delta R_{\text{Б}}^2}, \tag{4.39}$$

где α_1 и α_2 – безразмерные коэффициенты, определяемые по формулам

$$\alpha_1 = \frac{2\pi R_{\text{Б}}}{C}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi R_{\text{Б}}^3}{\sin\theta} \frac{1}{I_1}. \tag{4.40}$$

Эти коэффициенты зависят только от угла θ наклона бокового элемента по отношению к опорной колонне и, следовательно, могут быть найдены из геометрических соотношений, показанных на рис. 4.23, *б*. Численные значения α_1 и α_2 можно получить и по графику на рис. 4.23, *в*.

Чтобы гарантировать узловое соединение от продавливания, необходимо обеспечить значения $\tau_{\text{п}}$ меньшие, чем допускаемое касательное напряжение для материала колонны, принимаемое с учетом некоторого коэффициента запаса. Это значение может быть приближенно принято равным 0,4 от предела текучести при растяжении. Более точные рекомендации по этому вопросу, а также по расчету более сложных соединений можно найти в трудах Американского нефтяного института [34].

Пример 4.7–1. Для вертикальной колонны, показанной на рис. 4.24, определим минимально допустимую толщину стенки, при которой не происходит ее продавливание раскосом *1–2*. Положим максимальное сопротивление сдвигу равным 100 МПа.

При угле наклона раскоса по отношению к колонне, равном 45°, по графику на рис. 4.23, *в* получим, что $\alpha_1 = 0{,}82$ и $\alpha_2 = 0{,}56$. Подставив эти значения в формулу (4.39), получим

$$100 = 0{,}82 \frac{1{,}3}{2\pi\delta 0{,}30} + 0{,}56 \frac{0{,}75}{\pi\delta 0{,}30^2},$$

откуда найдем $\delta = 0{,}02$ м, т. е. минимальную толщину стенки.

Усталостное разрушение. Разрушение узловых соединений может быть обусловлено не только продавливанием стенки колонны, но и происходить в результате *усталости* материала, проявляющейся в виде развития микротрещин под влиянием многократных циклических изменений нагрузки при волновом воздействии. Усталостное разрушение может наступить даже тогда, когда напряжения в элементах не превосходят предела текучести. Чем выше циклически изменяющееся напряжение, тем меньшее число циклов требуется для разрушения. Из-за резкого изменения геометрии концов раскосов, присоединяющихся к узлу, здесь

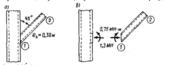


Рис. 4.24. К примеру 4.7–1: *а* – схема узла; *б* – расчетные усилия.

возникает концентрация напряжений, поэтому усталостные разрушения, если они происходят, следует ожидать прежде всего на концах раскосов или в материале сварного шва.

Усталостная характеристика материала обычно представляется в форме *кривой усталости*, показывающей число циклов N, необходимых для наступления усталостного разрушения при данной амплитуде напряжений σ (или диапазоне изменения напряжений 2σ).

На рис. 4.25 показана кривая усталости, типичная для сталей, обычно применяемых для сооружений континентального шельфа. Как видно, при амплитудах колебания напряжений, меньших 7 МПа, усталостное разрушение не возникает, как бы ни было велико число циклов. Этот уровень напряжений принимается за *предел выносливости*.

График на рис. 4.25 подразумевает циклические нагружения при фиксированной амплитуде напряжений σ. В сооружениях континентального шельфа элементы подвергаются за время эксплуатации переменным по амплитуде напряжениям, что связано с различными состояниями моря. В этом случае каждая амплитуда циклических напряжений причиняет некоторое усталостное повреждение в элементе, и в конечном счете усталостное разрушение связано с накоплением усталостных повреждений при всех амплитудах напряжений. Простейшее представление о накоплении циклических повреждений, приводящем к усталостному разрушению дает гипотеза о суммировании усталостных повреждений (Палмгрина – Майнера), согласно которой условие разрушения

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \ldots + \frac{n_m}{N_m} = 1, \tag{4.41}$$

где n_1 – число циклов изменения напряжений с амплитудой σ_1; N_1 – число циклов с той же амплитудой, при котором наступает усталостное разрушение и т. д. Значения $N_1, N_2, \ldots, N_m$ определяются по кривой усталости.

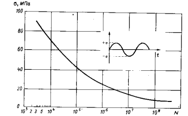


Рис. 4.25. Кривая усталости для конструкционной стали, используемой для сооружений в морской воде.

Для использования этого соотношения в расчетах на усталость элементов сооружения необходимо иметь представление об изменениях уровней напряжений в течение времени эксплуатации сооружения и количествах циклов изменения напряжений, испытываемых элементом на каждом уровне. Для получения такой оценки и проведения последующих расчетов на усталость можно рекомендовать методы статистической теории [21]. Упрощенные расчеты могут быть тем не менее выполнены путем рассмотрения различных дискретных уровней напряжений, возможных в результате волновых воздействий за весь период существования сооружения, с оценкой в процентном отношении к этому периоду длительности работы сооружения при каждом уровне напряжений. Долговечность элемента может быть тогда оценена непосредственно по выражению (4.41). В частности, если обозначить T срок службы элемента до усталостного разрушения, а $c_1, c_2, \ldots$ части этого срока, при которых происходят циклические изменения напряжений с амплитудами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ соответственно, то связанные с ними значения n_1, n_2 в выражении (4.41) определяются просто

$$n_1 = c_1 T / T_1; \quad n_2 = c_2 T / T_2, \ldots,$$

где $T_1, T_2, \ldots$ – периоды циклов изменения напряжений с амплитудами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ Подставив эти выражения в (4.41), получим условие усталостного разрушения в виде

$$\frac{c_1 T}{N_1 T_1} + \frac{c_2 T}{N_2 T_2} + \ldots + \frac{c_m T}{N_m T_m} = 1. \tag{4.42}$$

Отсюда может быть определен срок службы элемента до усталостного разрушения.

При выполнении указанных расчетов необходимо задаться законом распределения высот и периодов волн, а также долями времени (из общего времени эксплуатации сооружения), в течение которого они действуют. Для каждой волны можно определить максимальное нормальное осевое напряжение (суммарное от продольной силы и изгибающего момента) на концах боковых элементов с помощью методов, приведенных в параграфе 4.2. Эти максимальные напряжения равны амплитудам циклически изменяющихся напряжений, обусловленных волновой нагрузкой, а период цикла равен периоду соответствующей волны. Как отмечено выше, резкое изменение геометрии в узловых соединениях приводит к местному увеличению напряжений.

Эти напряжения играют важную роль в расчетах на усталостную прочность, поскольку ускоряют развитие микротрещин в рассматриваемой зоне. В таких расчетах напряжения принимаются увеличенными на *коэффициент концентрации напряжений* k_σ, т. е. вместо амплитуды σ циклического изменения напряжений в расчет вводится $k_\sigma \sigma$. Значение k_σ обычно принимается равным от 2 до 3. Напряжения, используемые в расчетах, могут быть увеличены не только с целью учесть концентрацию

Таблица 4.6. Данные к расчету срока службы элемента

H, м	T, с	c, %	σ, МПа
12 – 18	12	0,01	35
6 – 12	10	0,03	20
3 – 6	9	0,10	10
1,5 – 3	7	1,00	4
0 – 1,5	3	98,86	2,7

напряжений, но и в связи с динамичностью процесса взаимодействия, характерного для некоторых периодов волн. Приближенно этот фактор может быть учтен с помощью коэффициента динамичности, который будет получен далее в параграфе 4.10. По установленным амплитудам напряжений с помощью кривой усталости могут быть определены значения N_1, N_2, ... , необходимые для подсчета срока службы элемента по условию (4.42).

Пример 4.7–2. Для различных уровней волнения в районе эксплуатации сооружения установлены высоты H и соответствующие периоды T волн, действующих в месте установки сооружения, которые условно разбиты на диапазоны, представленные в табл. 4.6. Там же приведены (в процентах от общего времени эксплуатации сооружения) интервалы времени, в течение которых действуют волны разных диапазонов. Кроме того, для рассматриваемого бокового элемента сооружения известны амплитуды напряжения σ, соответствующие каждому диапазону волнения. Определим срок службы T узлового соединения, полагая коэффициент концентрации напряжений k_σ равным 2,0. Эффект динамического характера внешнего воздействия здесь не учитывается.

Эффективное напряжение, отвечающее номинальной амплитуде $\sigma_1 = 35$ МПа, равно $k_\sigma \sigma_1 = 70$ МПа. По кривой усталости на рис. 4.25 находим, что число циклов N_1 изменения напряжений с такой амплитудой, приводящее к разрушению, равно 10^4. Как следует из табл. 4.6, период волны, при которой возникает рассматриваемый уровень напряжений, $T_1 = 12$ с, а доля времени, в течение которого такое волнение может наблюдаться, $c_1 = 0{,}0001$. Аналогичные данные можно собрать и по остальным уровням волнения и отвечающим им амплитудам напряжения. Из условия (4.42)

$$\left(\frac{0{,}0001}{10^4 \cdot 12} + \frac{0{,}003}{10^5 \cdot 10} + \frac{0{,}001}{10^6 \cdot 18} + \frac{0{,}01}{10^6 \cdot 35}\right) T = 1.$$

Заметим, что уровню напряжений 2,7 МПа соответствует эффективное напряжение 5,4 МПа, которое ниже предела выносливости (см. рис. 4.25). Отношение $c_5 T / (N_5 T_5)$ для этого уровня напряжений равно нулю и, следовательно, не включается в условие (4.42). Из полученного равенства находим, что $T = 6{,}78 \cdot 10^8$ с или 21,5 года.

4.8. Расчеты железобетонных сооружений морского шельфа

Примеры подобных сооружений даны в главе 1. Железобетонные буровые платформы относятся к сооружениям гравитационного типа, поскольку их устойчивость на опрокидывание от горизонтальных нагрузок обеспечивается благодаря значительному собственному весу, передаваемому непосредственно на поверхность грунтового основания на большой площади опирания (рис. 4.26). Как показано на рисунке, такие сооружения обычно состоят из ячеистого фундаментного блока и одной или нескольких, не соединенных друг с другом опорных колонн, поддерживающих верхнее строение (платформу). Фундаментный блок и колонны обычно выполняются из железобетона, а платформа из стали. Основное назначение фундаментного блока – обеспечение надежного опирания и устойчивости всего сооружения. Большей частью фундаментный блок и опорные колонны строятся на мелководной акватории гавани в вертикальном положении. После монтажа верхнего строения сооружение буксируется в полупогруженном состоянии к месту эксплуатации, где ячеистый фундамент заполняется водой и опускается на морское дно.

Если не учитывать те особенности, которые порождены способом установки на место бурения, то окажется, что проектирование и расчеты гравитационных сооружений имеют много общего с изложенными выше методами расчета для сооружений, выполненных из стали. Так, можно воспользоваться полученными ранее расчетными нагрузками от волнового и ветрового воздействий, зависимостями для предварительного назначения и последующего уточнения основных размеров элементов принятой конструктивной формы, обеспечивающих надлежащую прочность сооружения при действии расчетных нагрузок. Изложенные в главе 2 методы строительной механики для определения внутренних усилий в элементах сооружения справедливы как для стальных, так и железобетонных конструкций. Однако, использование железобетона в качестве конструктивного материала приводит к необходимости проведения дополнительных расчетов, которые для стальных конструкций не выполняются.

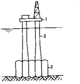


Рис. 4.26. Железобетонная гравитационная буровая платформа.

1 – верхнее строение; 2 – железобетонные опорные колонны; 3 – железобетонный ячеистый фундамент.

Как конструкционный материал бетон обладает высокой прочностью при сжимающих нагрузках (обычно от 20 до 40 МПа) и очень низкой при растяжении (менее 15 % от прочности при сжатии). Таким образом, в бетонных элементах, подверженных растяжению от продольной силы или же вследствие изгиба, необходимо предусмотреть дополнительные средства для восприятия растягивающих усилий.

Одним из способов достижения этой цели является отливка бетона вокруг стальных арматурных стержней, вытянутых в направлении ожидаемых растягивающих усилий. При загружении элемента после отвердения бетона растягивающее усилие будет принимать на себя арматурный стержень. Недостатком *железобетона* как материала для сооружений морского шельфа является растрескивание бетона вокруг арматуры при растягивающих нагрузках и нарушение слоя, защищающего арматурную сталь от коррозионного действия морской воды.

Другой способ упрочнения бетона для восприятия растягивающих усилий заключается в том, что после отвердения бетона через оставленные в элементе узкие продольные каналы протягиваются высокопрочные стальные проволоки, пучки или стержни, которые сначала заанкериваются на одном конце, натягиваются и заанкериваются в бетоне на другом конце. Усилие натяжения стали передается на бетон в виде сжимающей нагрузки. Приложение к элементу растягивающей нагрузки в направлении предварительного напряжения проявляется (при условии, что предварительное натяжение достаточно), как разгрузка бетона от его начального обжатого состояния. В этих условиях бетон сам по себе при нагружении не испытывает растягивающих напряжений и, следовательно, не растрескивается.

Если предварительное натяжение достаточно велико для предотвращения растрескивания бетона при растяжении, то для расчета предварительно напряженных элементов используется обычная теория упругих балок.

В отличие от стали бетон не имеет хорошо выраженного предела напряжений, ниже которого диаграмма деформации оказывается линейной. Напротив, касательная к диаграмме деформации для бетона при сжатии имеет постепенно изменяющийся наклон, значение которого зависит не только от достигнутого уровня напряжений, но и от прочности конкретно рассматриваемого вида бетона. На рис. 4.27, *а* показаны диаграммы деформации для двух бетонов, имеющих разные пределы прочности $\sigma'_Б$. Наклон начальной, почти прямолинейной, части диаграммы используется обычно для определения модуля упругости бетона $E_Б$ в мегапаскалях, который может быть найден также по эмпирической формуле

$$E_Б = 44\gamma_Б^{3/2}\sqrt{\sigma'_Б},$$

где $\gamma_Б$ – удельный вес бетона, кН/м^3 (обычно около 23 кН/м^3); а $\sigma'_Б$ выражается в мегапаскалях. Возможность расчетов в упругой стадии при определенном таким образом модуле упругости ограничена уровнем напряжений, находящимся не выше 45 % от предела прочности бетона.

Однако, даже при указанном ограничении расчеты могут быть затруднены в связи с ползучестью бетона, релаксацией напряжений в арматурных пучках, проскальзыванием их в анкерах и т. д. По этой причине при расчете железобетонных элементов в отличие от стальных общий коэффициент запаса назначается обычно по предельному значению

нагрузки, которую элемент может выдержать без разрушения, а не по уровню напряжений, возникающих в нем при расчетных нагрузках.

В типичных сооружениях морского шельфа, подобных изображенному на рис. 4.26, предварительное напряжение арматуры применяется обычно для предотвращения трещинообразования в бетонных опорных колоннах и ячейках фундаментного блока. Однако при расчете только на одно предварительно напряженное армирование несущая способность элементов может оказаться недостаточной по сравнению с расчетной нагрузкой, установленной с учетом общего коэффициента запаса (обычно принимаемого в диапазоне от 1,5 до 2,0 и учитывающего одновременно увеличение нагрузки и снижение несущей способности). В этом случае для повышения несущей способности до требуемого уровня к расчетной предварительно напрягаемой арматуре добавляется обычная, т. е. ненапрягаемая. Характерные диаграммы деформации предварительно напрягаемой проволоки из высокопрочной стали и обычных арматурных стержней показаны на рис. 4.27, *б*.

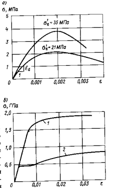


Рис. 4.27. Диаграммы деформации: *а* – для бетона при сжатии; *б* – для арматурного пучка из высокопрочной стали (*1*) и арматурного стержня (*2*).

Рекомендации по проектированию железобетонных сооружений общего типа можно найти в [5], а с учетом специфики сооружений морского шельфа – в [13]. Общие положения расчета бетона изложены в работах [18, 49].

Чтобы проиллюстрировать основные принципы расчета предварительно напряженного бетона, рассмотрим элемент, имеющий один предварительно напрягаемый арматурный пучок, совпадающий с продольной осью элемента (рис. 4.28). По концам элемента приложены продольные силы N_1 и N_2, поперечные силы Q_1 и Q_2, изгибающие моменты M_1 и M_2. Площадь поперечного сечения арматурного пучка считается достаточно малой, так что напряжения в бетоне могут быть подсчитаны для сечения брутто. Если обозначить *a* расстояние от оси элемента до его внешней поверхности,

Рис. 4.28. Предварительно напряженный железобетонный элемент.

1 – пучок высокопрочной стальной арматурной проволоки; *2* – бетон.

экстремальное нормальное напряжение в бетоне при изгибе может быть определено по формуле

$$\sigma_{Б,\,M} = \pm\, Ma/I, \tag{4.43}$$

где M – максимальный изгибающий момент; I – момент инерции поперечного сечения элемента. Аналогично, нормальные напряжения, связанные с продольной силой, определяются зависимостью

$$\sigma_{Б,\,N} = -N/A, \tag{4.44}$$

где A – общая площадь поперечного сечения элемента. Усилие натяжения пучка передается на бетон как сжимающее и вызывает в нем предварительные напряжения

$$\sigma_{Б,\,пн} = -\sigma_а A_а/A, \tag{4.45}$$

где $\sigma_а$ – напряжение в натянутом арматурном пучке; $A_а$ – площадь поперечного сечения арматуры.

Результирующее напряжение в бетоне получается суммированием полученных выражений

$$\sigma_Б = \pm\frac{Ma}{I} - \frac{N}{A} - \frac{\sigma_а A_а}{A}. \tag{4.46}$$

Условием отсутствия растягивающего напряжения в бетоне при изгибе будет равенство

$$0 = +\frac{Ma}{I} - \frac{N}{A} - \frac{\sigma_а A_а}{A}, \tag{4.47}$$

из которого определяется площадь поперечного сечения арматуры, если в ней задано предварительное напряжение $\sigma_а$. Соответствующее этому условию максимальное сжимающее напряжение в бетоне

$$\sigma_Б = -\frac{Ma}{I} - \frac{N}{A} - \frac{\sigma_а A_а}{A}. \tag{4.48}$$

Поскольку для определения напряжений использовалась теория упругого изгиба балок, это сжимающее напряжение обычно ограничивается значением 45 %-ного предела прочности бетона на сжатие. В этих пределах, как отмечалось выше, бетон можно условно считать упругим. При заданных размерах сечения элемента это условие ограничивает значения изгибающего момента и продольной силы, которые могут быть приложены к элементу.

На основании теории упругого изгиба балок могут быть подсчитаны касательные напряжения в бетоне, а затем с учетом нормальных

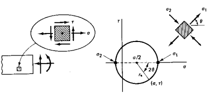


Рис. 4.29. Круг Мора и главные напряжения в бетонном элементе (радиус круга $r = \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2}$).

напряжений вычислено значение главного растягивающего напряжения. Это напряжение действует под углом к растягивающему нормальному напряжению, обусловленному изгибом. Если обозначить τ касательное, а σ нормальное напряжение в некоторой точке поперечного сечения элемента, то главное растягивающее напряжение σ_1 определяется с помощью круга Мора (рис. 4.29), как

$$\sigma_1 = (\sigma/2) + \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2}, \tag{4.49}$$

а угол θ между направлением действия этого напряжения и осью элемента находится из выражения

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2\tau/\sigma. \tag{4.50}$$

Критическое значение этого напряжения в мегапаскалях, соответствующее разрушению, обычно полагается равным около $0{,}33\sqrt{\sigma'_Б}$, где $\sigma'_Б$ – предел прочности бетона на сжатие, МПа. Условием отсутствия трещинообразования таким образом будет $\sigma_1 \leqslant 0{,}33\sqrt{\sigma'_Б}$, где σ_1 – наибольшее значение растягивающего главного напряжения в элементе.

В относительно длинных элементах, где доминируют напряжения от изгиба, образование трещин от нормальных растягивающих напряжений, связанных с изгибом, следует ожидать до появления трещин, обусловленных растяжением в диагональном направлении. Для того чтобы оценить значение изгибающего момента $M_т$, соответствующего началу трещинообразования, можно использовать формулу (4.46), в которой напряжения растяжения следует принять равными значению $\sigma''_Б$, соответствующему образованию трещин. Это критическое напряжение обычно принимается равным (в МПа) $0{,}63\sqrt{\sigma'_Б}$, где $\sigma'_Б$ – предел прочности бетона на сжатие, МПа. Таким образом, получаем уравнение

$$\sigma''_Б = \frac{M_т a}{I} - \frac{N}{A} - \frac{\sigma_а A_а}{A}, \tag{4.51}$$

из которого определяется изгибающий момент, соответствующий началу трещинообразования.

Полученные выше результаты основаны на представлении бетона как вполне упругого материала. Уже отмечено ранее, что вследствие явлений ползучести, релаксации напряжений в преднапрягаемых арматурных пучках результаты, полученные на основании *метода допускаемых напряжений*, содержат некоторую ошибку. Как принято в практике инженерных расчетов бетонных конструкций, общий коэффициент запаса устанавливается соответственно путем определения максимального значения момента, который элемент может воспринимать без разрушения. Эти расчеты выполняются с помощью метода *разрушающих усилий*.

Чтобы установить указанный момент, рассмотрим предельное состояние, в котором бетон в сжатой зоне близок к растрескиванию, а в растянутой зоне уже полностью растрескался и не способен нести какие-либо растягивающие усилия. Деформация сжатия, вызывающая разрушение бетона, обычно равна 0,003. Изменение деформации по высоте поперечного сечения элемента полагается линейным (рис. 4.30, *а*) и может быть представлено в виде

$$\epsilon = -(0{,}003/e)\,\xi, \tag{4.52}$$

где ξ означает расстояние от нейтральной оси (положительное, если направлено вверх); e – расстояние от внешнего волокна до нейтральной оси.

Поскольку диаграмма деформации при таком уровне деформации уже не является линейной, распределение сжимающих напряжений в бетоне должно быть таким, как изображено на рис. 4.30, *б*. Растягивающие напряжения в бетоне полагаются нулевыми, т. е. при данном уровне деформации бетон из-за трещин не способен более нести растягивающие усилия.

Для упрощения расчетов распределение сжимающих напряжений по сечению аппроксимируется равномерно распределенным (рис. 4.30, *в*), причем $\sigma_Б = 0{,}85\sigma'_Б$, а коэффициент α принимается равным 0,85 при $\sigma'_Б \leqslant 28$ МПа и при увеличении $\sigma'_Б$ сверх 28 МПа уменьшается на 0,05 на каждые 7 МПа.

По условию равновесия сумма сжимающих сил в бетоне и растягивающего усилия в арматурном пучке должна равняться продольной сжимающей силе N, т. е.

$$\sigma_а A_а - \sigma_Б A_Б = -N, \tag{4.53}$$

где $A_Б$ – площадь сжатой зоны сечения, в пределах которой действует напряжение $\sigma_Б$. Полученное равенство может быть использовано для

Рис. 4.30. Схемы к расчету предельного значения момента: *а* – изменение деформаций по высоте поперечного сечения элемента; *б* – усилие в арматуре (*1*) и напряжения в бетоне (*2*); *в* – упрощенная схема распределения напряжений в бетоне.

определения положения нейтральной (при изгибе) оси путем нахождения расстояния e. Напряжение $\sigma_а$ определяется по диаграмме деформации арматурного стального пучка при деформации, равной сумме деформации, соответствующей предварительному натяжению, и деформации, определяемой по выражению (4.52). Так как эта деформация зависит от расстояния e, решение уравнения приходится получать путем последовательных приближений.

По найденному значению e может быть определен предельный изгибающий момент $M_{пр}$ относительно центральной оси сечения как сумма моментов от сжимающих и растягивающих усилий. Так как в рассматриваемом случае арматурный пучок совпадает с центральной осью элемента, плечо растягивающего усилия равно нулю. Следовательно, предельный изгибающий момент определяется по сжимающему усилию $\sigma_Б A_Б$:

$$M_{пр} = \sigma_Б A_Б \bar{x}, \tag{4.54}$$

где $\bar{x}$ – расстояние от центральной оси поперечного сечения до центра тяжести сжатой зоны этого сечения.

Если предельный изгибающий момент не отличается от расчетного на принятый коэффициент запаса, он может быть повышен с помощью дополнительного армирования обычными (не преднапрягаемыми) стержнями, располагаемыми вдоль оси элемента. Например, если единственный арматурный стержень с поперечным сечением A_r расположен на расстоянии j ниже центральной оси элемента, то напряжение σ_{ar} в этом стержне, определенное по деформации из выражения (4.52) и диаграмме деформации арматурной стали, создает дополнительное усилие $\sigma_{ar} A_r$, которое должно быть введено в равенство (4.53), а в выражение (4.54) соответственно включается дополнительный момент, равный $j\,\sigma_{ar} A_r$.

В дополнение к обычному армированию, которое может потребоваться в целях увеличения предельного значения момента в элементе, может оказаться необходимым армирование для предотвращения трещинообразования при совместном действии касательного и нормального напряжений, соответствующих предельным нагрузкам. Это объясняется тем, что необходимый уровень предельного изгибающего момента не может реализоваться из-за неспособности потрескавшегося бетона сопротивляться имеющимся поперечным силам. В этой связи поперек оси элемента устанавливаются арматурные стержни, называемые *хомутами*, которые придают элементу способность сопротивляться сдвигу.

В качестве примера рассмотрим отделенную трещиной часть элемента с хомутами на рис. 4.31. Если $Q_{пр}$ обозначает поперечную силу, отвечающую расчетному предельному моменту $M_{пр}$, а $Q_Б$ обозначает поперечную силу, которую бетон может нести до растрескивания, то разность усилий $Q_{пр} - Q_Б$ должна быть сбалансирована усилиями в хомутах. Обозначим $A_х$ общую площадь поперечного сечения хомутов в любом продольном сечении. Тогда максимальное усилие, возникающее в них, равно приближенно $\sigma_т A_х$, где $\sigma_т$ – предел текучести материала хомутов. Окончательно, если обозначить d проекцию длины трещины на ось элемента, а s – шаг хомутов, то число хомутов, приходящихся на

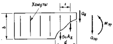


Рис. 4.31. К расчету поперечной арматуры.

рассматриваемое сечение, должно быть таким, что

$$\sigma_т A_x (d/s) = Q_{пр} - Q_Б. \qquad (4.55)$$

Поперечная сила $Q_Б$ обычно оценивается как наименьшая из поперечных сил, вызывающих появление трещин в центральной части элемента при косом растяжении или развитие трещин на внешней поверхности при изгибе. Первые из упомянутых трещин появляются, когда косое растяжение достигает напряжений $0{,}33\sqrt{\sigma'_Б}$ МПа, а вторые при осевом растяжении с напряжением около $0{,}83\sqrt{\sigma'_Б}$, где $\sigma'_Б$ – предел прочности бетона на сжатие, МПа. Проекция длины трещины d зависит от среднего наклона ее по отношению к оси элемента и глубины проникновения ее внутрь элемента. В инженерных расчетах последняя полагается равной 0,8 от высоты сечения элемента. При известных $Q_Б$ и d и заданных значениях прочности и площади поперечного сечения хомутов уравнение (4.55) может быть решено относительно шага хомутов. Как правило, шаг хомутов должен быть не более $d/2$, чтобы они пересекались со всеми возможными трещинами. При $Q_Б \geqslant Q_{пр}$ согласно уравнению (4.55) поперечное армирование не требуется. Однако, даже когда это условие выполняется, в большинстве рекомендаций по проектированию железобетонных конструкций имеется предложение по размещению минимального количества поперечной арматуры (см. например [5]).

Пример 4.8–1. Рассмотрим опорное основание буровой платформы в виде массивного фундаментного блока и одиночной цилиндрической железобетонной колонны, поддерживающей верхнее строение платформы с оборудованием (рис. 4.32, *а*). Колонна имеет внешний диаметр 4,5 м, и внутренний диаметр 3,3 м. Верхнее строение с оборудованием весит 25 МН, а колонна – 4,2 МН. Полагая равнодействующую волновой и ветровой нагрузок равной 1,8 МН и действующей на уровне 19 м выше основания колонны, определим площадь поперечного сечения предварительно напряженной арматуры, необходимой для предотвращения возникновения растягивающих напряжений в бетоне при условии, что арматурные пучки размещены на площади сечения колонны симметрично и предварительно напряжены до 1,05 ГПа. Кроме того необходимо оценить косое растяжение, обусловленное максимальными касательными

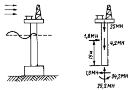


Рис. 4.32. К примеру 4.8–1.

напряжениями, и момент трещинообразования, приняв предел прочности бетона на сжатие равным 35 МПа.

Внутренние усилия достигают максимальных значений в основании колонны (см. рис. 4.32, *б*). Момент инерции I и площадь поперечного сечения (брутто) A колонны имеют следующие значения:

$$I = (\pi/64)\,(4{,}5^4 - 3{,}3^4) = 14{,}3\ м^4;$$

$$A = (\pi/4)\,(4{,}5^2 - 3{,}3^2) = 7{,}35\ м^2.$$

Предварительное напряжение распределено равномерно по сечению колонны, так что равнодействующая его действует по центральной оси колонны. Из уравнения (4.47) при $a = R = 2{,}25$ м, $M = 34{,}2$ МНм и $N = 29{,}2$ МН получим

$$0 = \frac{34{,}2 \cdot 2{,}25}{14{,}3} - \frac{29{,}2}{7{,}35} - \frac{\sigma_а A_а}{7{,}35}.$$

Решив это уравнение относительно $A_а$ при заданном $\sigma_а = 1{,}05$ ГПа, найдем суммарную площадь поперечных сечений предварительно напряженных арматурных пучков $A_а$ равной $0{,}986 \cdot 10^{-2}$ м². Соответствующее этому максимальное сжимающее напряжение в бетоне

$$\sigma_Б = \frac{34{,}2 \cdot 2{,}25}{14{,}3} - \frac{29{,}2}{7{,}35} - \frac{1{,}05 \cdot 10^3 \cdot 0{,}986 \cdot 10^{-2}}{7{,}35} = -10{,}76\ МПа.$$

Оно может быть сопоставлено с максимальным допускаемым значением $0{,}45\sigma'_Б = 0{,}45 \cdot 35 = 15{,}7$ МПа.

Из механики твердого деформируемого тела известно, что максимальное касательное напряжение возникает посередине высоты сечения изгибаемого элемента и равно

$$\tau_m = Q_m S / I(2\delta),$$

где Q_m – максимальная поперечная сила; I – момент инерции поперечного сечения; δ – толщина стенки; S – статический момент поперечного сечения, который при заданных значениях внешнего и внутреннего радиусов сечения колонны, т. е. $R = 2{,}25$ м и $r = 1{,}65$ м, равен

$$S = \frac{2}{3}\,(R^3 - r^3) = \frac{2}{3}\,(2{,}25^3 - 1{,}65^3) = 4{,}60\ м^3.$$

При максимальном значении поперечной силы в колонне, равном 1,8 МН, максимальное касательное напряжение

$$\tau_m = \frac{1{,}8 \cdot 4{,}60}{14{,}3 \cdot 1{,}2} = 0{,}48\ МПа.$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении колонны

$$\sigma = -\frac{29{,}2}{7{,}35} - \frac{1{,}05 \cdot 10^3 \cdot 0{,}986 \cdot 10^{-2}}{7{,}35} = -5{,}38 \text{ МПа}.$$

Максимальное (главное) растягивающее напряжение, вызванное совместным действием нормальных и касательных напряжений, определяется по формуле (5.49)

$$\sigma_1 = -\frac{5{,}38}{2} + \sqrt{\left(\frac{5{,}38}{2}\right)^2 + 0{,}48^2} = 0{,}04 \text{ МПа}.$$

Оно может быть сопоставлено с соответствующим разрушению критическим значением напряжения, равным $0{,}33\sqrt{\sigma'_Б} = 0{,}33\sqrt{35} = 1{,}96$ МПа.

Момент трещинообразования, связанного с растягивающими нормальными напряжениями от изгиба, находится из уравнения (4.51) при $\sigma''_Б = 0{,}63\sqrt{\sigma'_Б} = 0{,}63\sqrt{35} = 3{,}68$ МПа

$$3{,}68 = \frac{M_Б \cdot 2{,}25}{14{,}3} - \frac{29{,}2}{7{,}35} - \frac{1{,}05 \cdot 10^3 \cdot 0{,}986 \cdot 10^{-2}}{7{,}35},$$

отсюда $M_Б = 57{,}6$ МН · м, что примерно в 1,7 раза больше приложенного момента.

Пример 4.8–2. Определить для условий предыдущего примера предельное значение изгибающего момента в колонне, полагая что предварительная напрягаемая арматура с площадью поперечного сечения пучка, равной 24 см^2, сгруппирована в виде четырех пучков в поперечном сечении колонны (рис. 4.33) на окружности радиуса 1,95 м.

Положим распределение деформаций в сечении отвечающим трещинообразованию в бетоне, т. е. $\epsilon = -0{,}003$ (см. рис. 4.33, *а*). Выражение для распределения деформаций по высоте сечения может быть записано как

$$\epsilon = -(0{,}003/e)\xi,$$

где ξ – расстояние от нейтральной оси до точки сечения; e – расстояние от нейтральной оси до внешней поверхности. Сумма сжимающего усилия в бетоне и растягивающего усилия в арматуре определяет сжимающую продольную силу в сечении. Таким образом, по аналогии с уравнением (4.53) должно быть $F_а - F_Б = -N = -29{,}2$ МН. Это уравнение решается относительно расстояния e путем последовательных приближений.

В качестве приближения полагается, что напряжения в стали линейно связаны с деформацией при ее значениях, меньших предела текучести, а при деформациях, превышающих это значение, напряжения равны пределу текучести. Модуль упругости высокопрочной стали арматурных пучков принимается равным 186 ГПа, а предел текучести 1,45 ГПа. Деформация, отвечающая пределу текучести, равна $1{,}45/186 = 0{,}0078$.

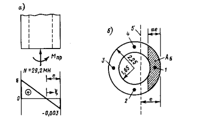


Рис. 4.33. К примеру 4.8–2.

1 – 4 – пучки предварительно напряженной арматуры (площадь поперечного сечения пучка 24 см^2); *5* – ось изгиба.

Предварительное напряжение в стали установлено на уровне 1,05 ГПа, т. е. начальная деформация растяжения в арматурных пучках равна $1{,}05/186 = 0{,}0056$. Распределение сжимающего напряжения в бетоне аппроксимируется прямоугольной эпюрой (см. рис. 4.30, *в*).

В первом приближении положим $e = 0{,}90$ м. Для арматурного пучка *1* получим $\xi = 1{,}95 - (2{,}25 - 0{,}90) = 0{,}60$ м. Деформация при соответствующем этому случаю изгибе элемента равна

$$\epsilon = -(0{,}003/0{,}90)\,0{,}60 = -0{,}002.$$

Добавляя полученную величину к начальной деформации от предварительного напряжения, т. е. к 0,0056, получим деформацию, равную 0,0036, и соответствующее напряжение в стали $186 \cdot 0{,}0036 = 0{,}67$ ГПа. Рассмотрев оставшиеся арматурные пучки *2*, *3* и *4*, найдем, что результирующая деформация у них превосходит деформацию, соответствующую пределу текучести, но меньше той, что соответствует разрыву (обычно от 0,030 и более). Следовательно, напряжения в этих пучках равны пределу текучести. Так как площадь каждого пучка равна 24 см^2, общее усилие в арматуре находится как $F_а = (0{,}67 \cdot 0{,}0024 + 3 \cdot 1{,}45 \cdot 0{,}0024)\,10^3 = 12{,}05$ МН.

Полагая предел прочности бетона на сжатие равным $\sigma'_Б = 35$ МПа, определим сжимающее напряжение в бетоне, как произведение $\sigma_Б A_Б$, где $\sigma_Б = 0{,}85 \cdot 35 = 29{,}7$ МПа; $A_Б$ – площадь заштрихованной на рис. 4.33, *б* части поперечного сечения колонны, которая может быть выражена через внутренний ($r = 1{,}65$ м) и внешний ($R = 2{,}25$ м) радиусы кольцевого поперечного сечения

$$A_Б = A_R; \quad ae \leqslant R - r; \quad A_Б = A_R - A_r; \quad ae > R - r$$

при A_R и A_r, определенных соответственно при $\rho = R$ и $\rho = r$ по формуле

$$A_\rho = \frac{1}{2} \rho^2 (2\theta - \sin 2\theta);$$

$$\cos\theta = (R - \alpha e)/\rho.$$

При $e = 0{,}90$ м, $\alpha = 0{,}8$ получим $A_Б = 1{,}526$ м^2 и сжимающее усилие в бетоне $F_Б = 29{,}7 \cdot 1{,}526 = 45{,}3$ МН. Общее усилие в сечении колонны равно $F_a - F_Б = -33{,}1$ МН, что превышает фактическое сжимающее усилие ($-29{,}2$ МН). Повторив расчеты, при $e = 0{,}80$ м найдем $F_a = 11{,}93$ МН и $F_Б = -44{,}45$ МН. Их сумма дает $F_a - F_Б = -29{,}52$ МН, что всего на 1 % отличается от фактического значения усилия.

По найденному значению e можно подсчитать соответствующий ему предельный момент $M_{пр}$ относительно центральной оси сечения. Усилие в арматурных пучках *2* и *4* не создает момента относительно этой оси, поскольку оно имеет нулевые плечи. Усилие в арматурном пучке *1* равно 1,50 МН и имеет плечо 1,95 м. Усилие в пучке *3* равно 3,48 МН и имеет плечо 1,95 м. Результирующий момент от усилий в арматурных пучках равен $-1{,}50 \cdot 1{,}95 + 3{,}48 \cdot 1{,}95 = 3{,}86$ МН·м. Сжимающее усилие в бетоне, как уже установлено, равно 44,45 МН. Положение центра тяжести площади сечения $A_Б$, на которой распределено это усилие, находится с помощью выражений

$$\bar{x} = x_R; \quad \alpha e \leqslant R - r;$$

$$\bar{x} = \frac{A_R x_R - A_r x_r}{A_Б}, \quad \alpha e > R - r,$$

где x_R и x_r определяются соответственно при $\rho = R$ и $\rho = r$ по формуле

$$x_\rho = \frac{2}{3} \rho \frac{\sin^2\theta}{\theta - \cos\theta \sin\theta}.$$

Здесь A_R, A_r и θ те же, что и ранее. Для $e = 0{,}80$ м имеем $A_R = 1{,}384$ м^2, $A_r = 0{,}019$ м^2, $x_R = 1{,}87$ м, $x_r = 1{,}371$ м и $\bar{x} = 1{,}88$ м. Момент от напряжений, воспринимаемых бетоном, равен $44{,}45 \cdot 1{,}88 = 83{,}40$ МН·м. Предельное значение момента подсчитывается как сумма моментов от усилий в бетоне и арматурных пучках $M_{пр} = 3{,}86 + 83{,}40 = 87{,}26$ МН·м.

При расчетном значении изгибающего момента 29,2 мН·м, установленном в предыдущем примере, и общем коэффициенте запаса, равном, скажем, 1,8, необходимо, чтобы предельный момент составлял 52,56 МН·м, так что несущая способность колонны более, чем достаточна.

Чтобы проверить необходимость в поперечном армировании при требуемом значении предельного момента 52,56 МН·м, можно

воспользоваться равенством (4.55). Так как максимальный изгибающий момент (в основании колонны) возникает от результирующей нагрузки, приложенной на 19 м выше основания (см. рис. 4.31), соответствующая этому моменту поперечная сила равна $52{,}56/19 = 2{,}77$ МН. Поперечная сила $Q_Б$, которую может воспринимать нерастрескавшийся бетон при данном предельном уровне сдвиговых напряжений, определяется как наименьшая из тех, что вызывают появление трещин в центре поперечного сечения при растяжении либо возникновение трещин, направленных от края к центральной оси, при растяжении от изгиба.

Для косых трещин, образующихся от растяжения, принимается, что главные растягивающие напряжения достигают предельного значения, связанного с пределом прочности бетона на сжатие $\sigma'_Б = 35$ МПа соотношением $\sigma_1 = 0{,}33\sqrt{\sigma'_Б} = 1{,}96$ МПа. По формуле (4.49) найдем (при $\sigma = -5{,}38$ МПа, как определено в предыдущем примере):

$$1{,}96 = -\frac{5{,}38}{2} + \sqrt{\left(\frac{5{,}38}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Отсюда $\tau = 3{,}79$ МПа. Соответствующая этому напряжению поперечная сила определяется из выражения (см. вычисления в предыдущем примере)

$$\tau = \frac{QS}{I(2\delta)}, \text{ т. е. } \frac{Q \cdot 4{,}60}{14{,}3 \cdot 1{,}2} = 3{,}79 \text{ МПа}.$$

Таким образом, $Q = 14{,}14$ МН.

Для образования трещин от растяжения при изгибе критическое значение растягивающего нормального напряжения должно быть равно $0{,}8\sqrt{\sigma'_Б} = 4{,}91$ МПа. Использовав уравнение (4.46), получим

$$4{,}91 = \frac{M'_Б \cdot 2{,}25}{14{,}3} - \frac{29{,}2}{7{,}35} - \frac{1{,}05 \cdot 10^3 \cdot 0{,}986 \cdot 10^{-2}}{7{,}35},$$

где $M'_Б$ означает изгибающий момент, вызывающий развитие трещин. Решив уравнения, получим $M'_Б = 65{,}40$ МНм. Соответствующая этому изгибающему моменту поперечная сила Q при условии, что момент вызван нагрузкой, приложенной на уровне 19 м над основанием колонны, равна $65{,}40/19 = 3{,}44$ МН.

Так как $3{,}44 < 14{,}14$, в уравнение (4.55) подставляется $Q_Б = 3{,}44$ МН. Замечая, что это значение превышает поперечную силу $Q_Б = 2{,}77$ МН, делаем вывод об отсутствии необходимости в поперечном армировании.

Пример 4.8–3. Пусть фундаментная часть буровой платформы, рассмотренной в примере 4.8–1, состоит из продолжения колонны и четырех цилиндрических бетонных элементов, расположенных вокруг колонны, как показано на рис. 4.34. По заданным составляющим опорной реакции определим необходимость предварительного напряжения

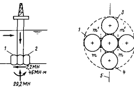


Рис. 4.34. К примеру 4.8–3.

1–4 – цилиндрические железобетонные ячейки фундамента; *5* – ось изгиба.

элементов фундамента, полагая, что наружные цилиндрические ячейки его имеют внешний радиус 2,25 м и толщину стенки 0,30 м. Определим кроме того момент трещинообразования и максимальное косое растяжение в фундаменте.

Фундамент в целом рассмотрим как сечение балки. Ветровые и волновые нагрузки полагаются действующими в направлении от элемента *1* к элементу *2*, а ось *a – a*, вокруг которой происходит изгиб, проходит через центры элементов *3–4* (рис. 4.34, *б*). При заданном направлении нагрузок наибольшие растягивающие напряжения должны быть на внешней поверхности элемента *1*, а наибольшие сжимающие напряжения – на внешней поверхности элемента *2*. Эти экстремальные напряжения определяются из выражения

$$\sigma_{\text{Б.ф}} = \pm MR'/I',$$

в котором R' означает расстояние от нейтральной оси до внешнего волокна рассматриваемых элементов; M – максимальный момент внешних нагрузок; I' – момент инерции поперечного сечения фундамента относительно нейтральной оси. Из исходных данных примера $R' = 6{,}75$ м, $M = 46{,}0$ МН·м. Момент инерции сечения фундамента в целом может быть подсчитан по его значениям для каждого элемента в отдельности. Момент инерции основания опорной колонны относительно его собственной центральной оси, совпадающей с нейтральной осью фундамента в целом, равен 14,3 м^4, а каждый из четырех окружающих опорную колонну элементов имеет момент инерции относительно его собственной центральной оси, равный 8,8 м^4. Чтобы определить суммарный момент инерции относительно нейтральной оси сечения в целом воспользуемся теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей. Так как центры тяжести опорной колонны и элементов *3*, *4* лежат на нейтральной оси фундамента, их вклад в общий момент инерции равен $14{,}3 + 2\cdot 8{,}8 = 31{,}9$ м^4. Оставшиеся элементы *1* и *2* имеют центры тяжести, удаленные от нейтральной оси на 4,5 м. Площади поперечных сечений этих

элементов равны 3,95 м^2, следовательно, их вклады в общий момент инерции равны: $8{,}8 + 4{,}5^2\cdot 3{,}95 = 88{,}8$ м^4. Итак, момент инерции сечения фундамента в целом равен $I' = 31{,}9 + 2\cdot 88{,}8 = 208{,}5$ м^4.

Теперь можно определить экстремальные напряжения в элементах *1* и *2*, вызванные изгибом,

$$\sigma_{\text{Б.ф}} = \pm\,\frac{46{,}0\cdot 6{,}75}{208{,}5} = \pm\,1{,}2 \text{ МПа}.$$

Чтобы исключить растяжение, вызванное изгибом, необходимо создать в бетоне предварительное напряжение 1,2 МПа (пренебрегая сжимающими напряжениями от собственного веса элементов и от гидростатического давления). Поскольку ветровые и волновые воздействия могут иметь любое направление, предварительное напряжение необходимо для всех четырех внешних цилиндров. Если напряжения от предварительного натяжения в арматурных пучках принять равным 1,05 ГПа, то суммарная площадь поперечных сечений пучков на одном цилиндре при симметричном размещении их по окружности

$$A_{\text{а}} = \frac{1{,}2\cdot 3{,}95}{1{,}05\cdot 10^3} = 4{,}52\cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

При таком предварительном напряжении и условии направления действующих нагрузок от элемента *1* к элементу *2* максимальное растягивающее напряжение (в элементе *1*) уменьшится до нуля, а максимальное сжимающее напряжение (в элементе *2*) увеличится до –2,4 МПа.

Момент трещинообразования $M_{\text{Б}}$ подсчитываем в предположении, что максимальное растягивающее напряжение в фундаменте равно $0{,}63\sqrt{\sigma'_{\text{Б}}} = 3{,}68$ МПа, как и в примере 4.8–1. Рассмотрев напряжения, вызванные изгибом, совместно с предварительным напряжением, получим уравнение

$$3{,}68 = \frac{M_{\text{Б}}\cdot 6{,}75}{208{,}5} - \frac{4{,}52\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}05\cdot 10^3}{3{,}95},$$

из которого найдем $M_{\text{Б}} = 151$ МН·м. Это значение в 3,3 раза больше приложенного момента.

Касательное напряжение в фундаменте находим по формуле

$$\tau = QS'/I'\delta',$$

где Q – поперечная сила; S' – статический момент сечения относительно нейтральной оси фундамента; I' – момент инерции, определенный ранее; δ' – ширина бетона в сечении, параллельном нейтральной оси фундамента, где определяется значение касательного напряжения.

Из геометрии поперечного сечения фундамента, показанного на рис. 4.34, *б*, можно заключить, что максимальное касательное напряжение τ_m должно появиться в сопряжении элементов *1* и *2* с опорной колонной, если ширина перемычки (измеряемая по линии $m - m'$) ограничена. Полагая ширину перемычки, равной 0,3 м, получим при $S' = 3{,}95 \cdot 4{,}5 = 17{,}75$ м^3; $Q = 2{,}2$ МН; $I' = 208{,}5$ м^4 и $\delta' = 0{,}3$ м

$$\tau_m = \frac{2{,}2 \cdot 17{,}75}{208{,}5 \cdot 0{,}3} = 0{,}62 \text{ МПа}.$$

Будем считать, что сжимающие напряжения от предварительного натяжения арматурных пучков в перемычке и в цилиндрических элементах одинаковы. Растягивающее нормальное напряжение от изгиба, возникающее в перемычке между опорной колонной и элементом *1*, определенное по использованной выше формуле при $R' = 2{,}25$ м, равно 0,40 МПа. Суммарное напряжение σ в перемычке равно $-1{,}20 + 0{,}40 = -0{,}80$ МПа. Главное растягивающее напряжение, обусловленное действием нормальных сжимающих и касательных напряжений, определяется по формуле (4.49)

$$\sigma_1 = -\frac{0{,}80}{2} + \sqrt{\left(-\frac{0{,}80}{2}\right)^2 + 0{,}62^2} = 0{,}38 \text{ МПа}.$$

Если принять коэффициент запаса 1,8, то следует задать нагрузки, действующие на фундамент, равными $M_{\text{пр}} = 1{,}8 \cdot 46 = 82{,}8$ МН и $Q_{\text{пр}} = 1{,}8 \cdot 2{,}2 = 4{,}8$ МН. Поскольку момент трещинообразования не превзойден, по этим усилиям можно, как и ранее, определить касательное и главное растягивающее напряжения. В результате получим $\tau_m = 1{,}12$ МПа, $\sigma_1 = 0{,}91$ МПа. Это меньше значения предельного главного растягивающего напряжения, при котором возникают трещины ($0{,}33\sqrt{\sigma'_{\text{Б}}} = 1{,}96$ МПа), приблизительно в 2,7 раза. Поэтому рассматриваемые предельные нагрузки не вызовут в фундаменте косого растрескивания.

4.9. Напряжения в бетонных сооружениях от наружного давления

Напряжения, возникающие в погруженных в воду цилиндрических элементах бетонных сооружений, могут быть определены на основании зависимостей, аналогичных полученным в параграфе 4.4 для стальных конструкций. Как было выяснено эффект воздействия наружного давления проявляется в цилиндрических элементах в виде нормальных осевых и тангенциальных напряжений. На удалении от концов элемента эти напряжения определяются по формулам

$$\sigma_z = -pr/2\delta; \quad \sigma_\theta = -pr/\delta, \tag{4.56}$$

где p – наружное давление; r – радиус поперечного сечения элемента; δ – толщина стенки, которая полагается малой по сравнению с радиусом.

Нормальные осевые напряжения должны суммироваться с напряжениями, обусловленными иными воздействиями, чтобы получить общие осевые напряжения в элементе, действующие вместе с тангенциальными напряжениями, вызванными наружным давлением. Из-за относительно низкого уровня напряжений, допускаемых в бетонных элементах, возможность разрушения вследствие потери устойчивости кольцевой формы поперечного сечения под действием тангенциальных напряжений обычно не принимается во внимание. Более того испытания бетона при двухосном напряженном состоянии указали на слабое взаимодействие между двумя составляющими напряжений, чтобы оно влияло на разрушение; таким образом при проведении расчетов необходимо обеспечить, чтобы максимальные значения каждой из компонент – суммарного осевого и тангенциального сжимающего напряжений – не превосходили допускаемого уровня для сжимающих напряжений. Этот уровень определяется обычно 45 % предела прочности бетона на сжатие. В связи с низкой прочностью бетона на растяжение должны быть, разумеется, ограничены и значения растягивающих напряжений, как определено в параграфе 4.8.

Влияние закрепления концов

Влияние концевого закрепления цилиндрического бетонного элемента, подвергнутого действию наружного давления, может быть значительным и проявляется в виде местного увеличения нормальных осевых и связанных с ними касательных напряжений. Если днище цилиндра плоское, то экстремальные напряжения можно определить с помощью решений, приведенных в параграфе 4.4. В частности, полагая коэффициент Пуассона для бетона $\nu = 0{,}15$, из выражений (4.26) получим для наружной поверхности у закрепленного конца

$$\sigma_z = 1{,}12(pr/\delta); \quad \sigma_\theta = 0{,}17(pr/\delta), \tag{4.57 а}$$

а для внутренней поверхности

$$\sigma_z = -2{,}12(pr/\delta); \quad \sigma_\theta = -0{,}32(pr/\delta). \tag{4.57 б}$$

Радиальные касательные напряжения равны нулю на внешней и внутренней поверхностях и достигают максимального значения в срединной поверхности, для которой можно записать следующие выражения:

$$\tau = -1{,}06p\sqrt{r/\delta}; \quad \sigma_z = -pr/2\delta; \quad \sigma_\theta = -0{,}08(pr/\delta). \tag{4.57 в}$$

Как и ранее, касательные напряжения направлены наружу цилиндра, в поперечном сечении, внешняя нормаль которого направлена в сторону закрепленного конца.

Пример 4.9–1. Рассмотрим бетонный цилиндрический элемент *ABCD* фундаментного блока гравитационного сооружения, показанного

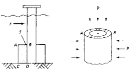


Рис. 4.35. К примеру 4.9–1.

на рис. 4.35, и предположим, что равнодействующая ветровой и волновой нагрузки F вызывает на стороне A максимальное нормальное напряжение от изгиба, равное 2 МПа; на стороне B такое же напряжение равно 0,67 МПа, а связанное с ним касательное напряжение на срединной поверхности той же стороны равно 0,40 МПа. Определим дополнительные нормальные осевые и касательные напряжения, обусловленные наружным давлением, интенсивностью 0,55 МПа, и установим значение необходимого предварительного напряжения конструкции. Элементы имеют наружный радиус 3,0 м, толщина стенки 0,30 м.

По формулам (4.57 а) и (4.57 б) получаем у закрепленных концов цилиндрического элемента на наружной его поверхности $\sigma_z = 6{,}16$ МПа; $\sigma_\theta = 0{,}93$ МПа, а на внутренней поверхности $\sigma_z = -11{,}65$ МПа; $\sigma_\theta = -2{,}76$ МПа.

На стороне A элемента нормальное напряжение от изгиба под действием ветровых и волновых нагрузок равно по условиям примера 2,0 МПа, так что, полагая это напряжение практически постоянным по толщине стенки, найдем экстремальные значения нормальных осевых напряжений $\sigma_z = 8{,}16$ МПа и $\sigma_z = -9{,}65$ МПа.

Итак, чтобы исключить растяжение в цилиндре, требуется создать предварительное нормальное напряжение интенсивностью $-8{,}16$ МПа, в результате которого напряжения изменяются до следующих значений: $\sigma_z = 0$, $\sigma_z = -17{,}81$ МПа.

Отметим, что если направление ветро-волновой нагрузки изменится на противоположное, то вызванные им нормальные осевые напряжения будут равны $-2{,}0$ МПа и в результате суммарные напряжения будут тогда такими: $\sigma_z = -4{,}00$ МПа; $\sigma_z = -21{,}81$ МПа.

При максимально допустимых значениях сжимающих напряжений, принимаемых на уровне 45 % предела прочности бетона на сжатие, необходимо использовать для конструкции бетон, имеющий прочность около 50 МПа.

Далее определим суммарное касательное напряжение. От изгиба под действием ветро-волновых нагрузок максимальные касательные напряжения, возникающие в срединной поверхности на стороне B цилиндра, равны по условиям примера 0,40 МПа. Горизонтальная составляющая этого касательного напряжения действует в направлении ветро-волновой нагрузки (см. рис. 4.35). От наружного давления касательное напряжение, которое получается по формуле (4.57), равно $\tau_m = 1{,}84$ МПа. Горизонтальная составляющая этого напряжения действует в радиальном направлении наружу. Таким образом, на стороне B в цилиндрическом элементе действуют два касательных напряжения, совпадающие по направлению и дающие в сумме напряжение $\tau = 2{,}24$ МПа. От предварительного

напряжения, равного $-8{,}16$ МПа, и изгиба под действием ветро-волнового воздействия, создающего на стороне B нормальные напряжения 0,67 МПа, в срединной поверхности (где наружное давление вызывает максимальные по значению касательные напряжения, а также нормальные осевые напряжения, равные в соответствии с формулой (4.57 в) $-2{,}75$ МПа) действует суммарное сжимающее нормальное напряжение $\sigma = -10{,}24$ МПа. Таким образом, главное растягивающее напряжение

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 0{,}47 \text{ МПа}.$$

При прочности бетона на сжатие $\sigma'_Б = 50$ МПа прочность на растяжение равна приблизительно $0{,}33\sqrt{\sigma'_Б} = 2{,}33$ МПа, следовательно, образование косых трещин в бетоне не предвидится. Аналогичный вывод можно сделать и в случае, когда направление ветро-волнового воздействия изменится на противоположное. В этом случае максимальное касательное напряжение получается равным $1{,}84 - 0{,}40 = 1{,}44$ МПа, а суммарное сжимающее нормальное напряжение 12,99 МПа.

И наконец, отметим, что значение максимального сжимающего тангенциального напряжения σ_θ в цилиндре, определяемое по формуле (4.56), равно 5,50 МПа, что существенно меньше допустимого уровня, равного $0{,}45 \cdot 50 = 22{,}5$ МПа. Кроме того, максимальное растягивающее тангенциальное напряжение, возникающее на внешней поверхности цилиндра около закрепленного конца, равно 0,93 МПа и не превосходит уровня $0{,}63\sqrt{\sigma'_Б} = 4{,}40$ МПа, при котором могут образовываться трещины растяжения.

Сферические днища цилиндров

Из примера 4.9–1 можно сделать вывод, что местное увеличение расчетных напряжений в цилиндре вблизи закрепленного конца приводит к необходимости увеличения уровня предварительного напряжения арматуры и использования высокопрочного бетона. Этот неблагоприятный эффект может быть понижен, если вместо плоских днищ использовать сферические (или почти сферические). Более гибкие сферические днища ослабляют концевые концентрации напряжений в цилиндре.

Для выяснения напряженного состояния оконечной части цилиндра в этих новых условиях рассмотрим цилиндрический элемент, показанный на рис. 4.36, *а*. При отсутствии днища радиальные перемещения цилиндра описываются формулой [см. зависимость (4.8)]

$$u = -(pr^2/2E\delta)\,(2 - \nu). \tag{4.58}$$

Можно вывести также формулу для радиального перемещения сферического купола, не прикрепленного к цилиндру:

$$u = -(pr^2/2E\delta)\,(1 - \nu). \tag{4.59}$$

Здесь r – радиус цилиндра и сферы; δ – толщина стенок цилиндра и сферы; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала.

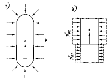


Рис. 4.36. Цилиндрический элемент со сферическими днищами.

Поскольку эффект закрепления торца цилиндра носит локальный характер (убывающий по экспоненте при удалении от места сопряжения цилиндра со сферой), сферическую поверхность в окрестности сечения $z=0$ можно рассматривать как цилиндрическую. Рассмотрим тогда два цилиндра, соединенных вместе так, как показано на рис. 4.36, *б*. Верхний цилиндр представляет собой действительный цилиндр, а нижний – сферическую оболочку в окрестности сопряжения. Действительный цилиндр подвергается наружному давлению p'_{02}, а условный – давлению p'_{01}, подобранных так, чтобы радиальные перемещения, определенные по формулам (4.58) и (4.59), соответствовали условию неразрывности.

Согласно (4.21) уравнение для радиальных перемещений u_1 в действительном цилиндре имеет вид

$$D\frac{d^4u_1}{dz^4}+\frac{E\delta}{r^2}u_1=-p\left(1-\frac{\nu}{2}\right), \tag{4.60}$$

а уравнение для радиальных перемещений u_2 в условном цилиндре запишется как

$$D\frac{d^4u_2}{dz^4}+\frac{E\delta}{r^2}u_2=\frac{p}{2}(1-\nu). \tag{4.61}$$

Граничные условия при $z=0$:

$$u_1=u_2;\quad \frac{du_1}{dz}=\frac{du_2}{dz};$$

$$M_1=M_2;\quad Q_1=Q_2,$$

где M и Q обозначают изгибающий момент и поперечную силу, определяемые по зависимостям (4.15) и (4.16).

С учетом граничных условий уравнения (4.60) и (4.61) получают следующие решения:

$$u_1=-\frac{pr^2}{2E\delta}\left[(2-\nu)-\frac{1}{2}e^{-\alpha z}\cos\alpha z\right]; \tag{4.62}$$

$$u_2=-\frac{pr^2}{2E\delta}\left[(1-\nu)+\frac{1}{2}e^{-\alpha z}\cos\alpha z\right], \tag{4.63}$$

где параметр α определен ранее выражением (4.23).

С помощью полученных решений напряжения определяются точно так же, как и в случае полного закрепления торца цилиндра.

В цилиндре, где напряженное состояние менее однородное, нормальные осевые σ_z и тангенциальные σ_θ напряжения на внешней и внутренней сторонах (соответственно при $\pm\delta/2$) могут быть определены по формулам

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z&=-\frac{pr}{\delta}\pm\frac{3pr}{4\delta}(\beta e^{-\alpha z}\sin\alpha z);\\ \sigma_\theta&=-\frac{pr}{\delta}+\frac{pr}{4\delta}e^{-\alpha z}(\cos\alpha z\pm3\nu\beta\sin\alpha z),\end{aligned}\right\} \tag{4.64 а}$$

где $\beta=[3(1-\nu^2)]^{1/2}$.

Радиальные касательные напряжения в срединной поверхности находятся по формуле

$$\tau=-\frac{3p}{16\alpha\delta}e^{-\alpha z}(\cos\alpha z-\sin\alpha z). \tag{4.64 б}$$

Экстремальное нормальное осевое напряжение σ_z возникает в цилиндре на расстоянии $\alpha z=0{,}8$ от сопряжения со сферой. Это напряжение и тангенциальное нормальное напряжение σ_θ при $\nu=0{,}15$ получают на внешней поверхности значения

$$\sigma_z=-0{,}64(pr/\delta);\quad \sigma_\theta=-1{,}01(pr/\delta), \tag{4.65 а}$$

а на внутренней поверхности

$$\sigma_z=-0{,}36(pr/\delta);\quad \sigma_\theta=-0{,}84(pr/\delta). \tag{4.65 б}$$

Здесь в отличие от случая, когда цилиндр имеет плоское днище, нет растягивающих напряжений, возникающих вследствие закрепления торца, и при этом напряжения, определяющие напряженное состояние, появляются на внешней стороне цилиндра. Радиальное касательное напряжение τ равно нулю на внутренней и внешней сторонах и достигает наибольшего значения на срединной поверхности. Максимум этой величины приходится на сопряжение цилиндра со сферой, где при $\nu=0{,}15$ получаем

$$\tau=-0{,}14p\sqrt{r/\delta};\quad \sigma_z=-pr/2\delta;\quad \sigma_\theta=(-3/4)(pr/\delta). \tag{4.65 в}$$

Полученные здесь результаты применимы не только к сферическим днищам, но и к днищам в виде эллипсоида вращения с основанием радиуса r и высотой b, отсчитываемой от торцевого сечения цилиндра.

Вместо выражения (4.65 а) для наибольших сжимающих напряжений следует использовать следующие:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= -\left(1 + 0{,}28\frac{r^2}{b^2}\right)\frac{pr}{2\delta}; \\ \sigma_\theta &= -\left(1 + 0{,}01\frac{r^2}{b^2}\right)\frac{pr}{\delta}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.66\ а)$$

а выражения (4.65 б) заменяются на

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= -\left(1 - 0{,}28\frac{r^2}{b^2}\right)\frac{pr}{2\delta}; \\ \sigma_\theta &= -\left(1 - 0{,}16\frac{r^2}{b^2}\right)\frac{pr}{\delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.66\ б)$$

Заметим, что напряжения могут оказаться положительными (*растягивающими) при достаточно большом значении* r/b. Выражение (4.65 в) для радиальных касательных, а также нормальных осевых и тангенциальных напряжений получают здесь вид

$$\left.\begin{aligned} \tau &= -\ 0{,}14\frac{r^2}{b^2}\ p\ \sqrt{\frac{r}{\delta}}; \\ \sigma_z &= -\frac{pr}{2\delta}; \\ \sigma_\theta &= -\left(1 - 0{,}25\frac{r^2}{b^2}\right)\frac{pr}{\delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.66\ в)$$

Касательные напряжения в цилиндре, получаемые по *выражениям* (4.65 в) и (4.66 в), направлены так же, как и в случае плоских днищ, т. е. по радиусу наружу в сечении, которое имеет внешнюю нормаль, обращенную в сторону места сопряжения с днищем.

Пример 4.9–2. Повторим расчеты, проведенные в примере 4.9–1, при условии, что днище цилиндра имеет форму *эллипсоида с отношением* высоты к радиусу основания $b/r = 2/3$.

Нормальные осевые напряжения, найденные по формулам (4.66 а) и (4.66 б) равны $\sigma_z = -4{,}48$ МПа; $\sigma_z = -1{,}02$ МПа. С учетом дополнительных напряжений 2,0 МПа, возникающих при изгибе от ветро-волнового воздействия, получим $\sigma_z = -2{,}48$ *МПа*; $\sigma_z = 0{,}98$ *МПа*.

Таким образом, чтобы исключить растяжение, достаточно создать предварительное напряжение порядка –0,98 МПа, в результате которого напряжения приобретут следующие значения: $\sigma_z = -3{,}46$ МПа; $\sigma_z = 0$.

Если направление ветро-волнового воздействия изменится на противоположное, то наибольшие напряжения будут такими: $\sigma_z = -7{,}46$ МПа; $\sigma_z = -4{,}00$ МПа.

Максимальное касательное напряжение в месте сопряжения цилиндра с днищем, определяемое по формуле (4.66 в), равно 0,55 МПа. Суммируя его с касательным напряжением 0,40 МПа от ветро-волновых воздействий, получим $\tau = 0{,}95$ МПа. Суммарное сжимающее нормальное напряжение складывается из предварительного напряжения –0,98 МПа, напряжения 0,67 МПа от ветро-волнового воздействия и напряжения, обусловленного наружным давлением –2,75 МПа, т. е. в итоге $\sigma = -3{,}73$ *МПа. Главное растягивающее напряжение*

$$\sigma_1 = \sigma/2 + \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2} = 0{,}23 \text{ МПа}.$$

Сопоставление полученных здесь результатов с соответствующими результатами в примере 4.9–1, показывает, что использование эллипсоидальной оболочки вместо плоского днища значительно снижает расчетные значения напряжений и необходимый уровень предварительного напряжения бетона.

4.10. Оценка влияния динамического характера воздействий

В начале этой главы подчеркивалось, что в расчетах проектируемого сооружения континентального шельфа на узловые нагрузки, обусловленные экстремальными условиями окружающей среды, при использовании методов, изложенных в главе 2, приходится пренебрегать динамическим эффектом периодического движения сооружения, возбуждаемого волновым воздействием. Статический расчет сооружения может быть приемлемым лишь при условии малости динамических нагрузок по сравнению с экстремальными статическими.

Для иллюстрации динамической реакции сооружения на волновые воздействия и вывода простейшей зависимости, позволяющей сделать предварительную оценку значимости динамического эффекта, рассмотрим приближенную схему расчета типичной буровой платформы, показанной на рис. 4.37. Полагается, что сооружение подвержено воздействию регулярной синусоидальной волны. Это воздействие приведено к сосредоточенной силе, приложенной к верхнему строению буровой установки,

$$F = F_0 \sin \omega t, \qquad (4.67)$$

где ω – круговая частота волны; t – время; F_0 – амплитуда приведенной волновой нагрузки, определяемая из условия, что она вызывает такое же перемещение верхнего строения, что и статически приложенная распределенная волновая нагрузка.

В качестве дальнейшего приближения полагается, что половина массы опорного основания присоединена к массе верхнего строения, т. е. приведенная масса платформы

$$m = m_п + (1/2) m_о, \qquad (4.68)$$

где $m_п$ – масса верхнего строения; $m_о$ – масса опорного основания

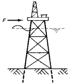


Рис. 4.37. Схема сооружения континентального шельфа с результирующей волновой нагрузкой, приведенной к уровню присоединения платформы к опорному основанию.

с учетом присоединенной массы воды (см. параграф 3.4). После сделанных упрощений само опорное основание может быть схематизировано стержнем, не имеющим массы и характеризуемым приведенной жесткостью, а его реакция определяется с помощью методов, изложенных в главе 2. Поскольку в расчетной схеме фигурирует только одна масса (приведенная масса на уровне верхнего строения) и существенным является только одно направление движения сооружения (горизонтальное), расчет динамической реакции сооружения может быть проведен так же, как и для *системы с одной степенью свободы*.

Суммарная горизонтальная сила F^{Σ}, приложенная к верхнему строению, складывается из волновой нагрузки F, силы инерции $-m\ddot{u}$ и силы сопротивления $-c\dot{u}$, где c – коэффициент сопротивления, а точка означает производные по времени. Таким образом,

$$F^{\Sigma}=F-m\ddot{u}-c\dot{u}. \tag{4.69}$$

На основании методов главы 2 суммарное усилие F^{Σ} может быть связано с горизонтальным перемещением u верхнего строения сооружения

$$F^{\Sigma}=ku, \tag{4.70}$$

где k – означает жесткость сооружения.

Исключив F^{Σ} из двух последних равенств и подставляя выражения (4.67) для волновой нагрузки, получим следующее дифференциальное уравнение для перемещения платформы:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=F_0 \sin \omega t. \tag{4.71}$$

Вводя параметры

$$\epsilon=0{,}5\,c/m; \quad \theta=\sqrt{k/m}, \tag{4.72}$$

и полагая затухание колебаний слабым, т. е. таким, что $\epsilon^2 \ll \theta^2$, решение уравнения (4.71) можно представить в виде

$$u=e^{-\epsilon t}\,(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\theta^2-\omega^2)^2+(2\epsilon\omega)^2}} \sin(\omega t-\varphi); \tag{4.73}$$

сдвиг фазы колебаний определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi=(2\epsilon\omega)/(\theta^2-\omega^2); \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \tag{4.74}$$

а постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий $u=\dot{u}=0$:

$$C_1=-\frac{F_0/m}{\sqrt{(\theta^2-\omega^2)^2+(2\epsilon\omega)^2}} \cos \varphi; \tag{4.75}$$

$$C_2=-\frac{F_0/m}{\sqrt{(\theta^2-\omega^2)^2+(2\epsilon\omega)^2}} \left(\frac{\omega}{\theta} \sin \varphi+\frac{\epsilon}{\theta} \cos \varphi\right). \tag{4.76}$$

Изучение полученного решения для перемещений u показывает, что первая его часть соответствует *затухающим* колебаниям, которые со временем прекращаются, а вторая часть отражает *установившиеся* колебания, которые система совершает после прекращения затухающих колебаний. Таким образом, спустя достаточно долгий промежуток времени с момента начала движения, платформа начинает совершать гармонические колебания с частотой ω и сдвигом по фазе φ, причем амплитуда перемещений может быть выражена через максимальное значение перемещения, соответствующее статическому приложению нагрузки; т. е. через

$$\frac{u_0}{u_{\text{ст}}}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\epsilon}{\theta}\,\frac{\omega}{\theta}\right)^2}}. \tag{4.77}$$

График, приведенный на рис. 4.38, показывает зависимость отношения $u_0/u_{\text{ст}}$ от ω/θ при различных уровнях демпфирования. При *резонансной частоте* $\omega=\theta$ амплитуда колебаний достигает максимального значения или близка к нему, причем значение это тем выше, чем ниже демпфирование. Величина, получаемая из выражения (4.72),

$$\theta=\sqrt{k/m}, \tag{4.78}$$

является важнейшей характеристикой реакции системы. Она называется *основной* или *собственной частотой* идеализированной системы и, как видно, зависит только от свойств сооружения.

Коэффициент затухания ϵ/θ у сооружений морского шельфа изменяется обычно в пределах от 0,05 до 0,10, т. е. составляет примерно 5–10 % от *критического затухания*, под которым понимается $\epsilon/\theta=1$.

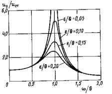


Рис. 4.38. График коэффициента динамичности для системы с одной степенью свободы.

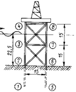


Рис. 4.39. К примеру 4.10–1.

Судя по графику на рис. 4.38, перемещения платформы (а значит, и напряжения в опорном основании) могут быть во много раз больше определенных в статическом расчете ($\omega = 0$), если частота волнового воздействия близка к собственной частоте сооружения. Это явление можно назвать динамическим эффектом. Для возможности проектирования сооружения на основе только статических расчетов на воздействие расчетной регулярной волны необходимо, чтобы частота волны была достаточно мала по сравнению с собственной частотой сооружения и *коэффициент динамичности* $u_0/u_{ст}$ в выражении (4.77) отличался от единицы не более, чем на 5–10%.

Пример 4.10–1. Рассмотрим стальное опорное основание буровой платформы, приведенное на рис. 4.39, и определим приемлемость статических расчетов ее, выполненных для расчетной волны высотой 12 м и периодом 9 с. Все четыре стороны сооружения идентичны. Вертикальные элементы имеют внешний диаметр 1,20 м и толщину стенки 40 мм. Горизонтальные и наклонные элементы имеют внешний диаметр 0,60 м и толщину стенки 12 мм. Матрица жесткости эквивалентной сваи на уровне морского дна имеет следующий вид:

$$[K] = 10^4 \begin{bmatrix} 0{,}142 & 0 & -25{,}4 \\ 0 & 68{,}6 & 0 \\ -25{,}4 & 0 & 606 \end{bmatrix}.$$

Значения элементов этой матрицы, полученной на основании статических расчетов, даны в килоньютонах и метрах.

Для того чтобы воспользоваться выражениями (4.77) и (4.78), сначала определим жесткость k сооружения, связывающую горизонтальную силу и перемещение сооружения на уровне платформы. Рассматривая одну сторону опорного основания и полагая, что на узлы *4* и *8* действуют горизонтальные силы по 450 кН, найдем с помощью методов главы 2 горизонтальное перемещение, равное 0,115 м. Таким образом, жесткость рамы равна $2 \cdot 450/0{,}115 = 7{,}83$ МН/м. Такую же жесткость имеет рама с противоположной стороны, следовательно, жесткость опорного основания как трехмерной системы равна $k = 2 \cdot 7{,}83 = 15{,}66$ МН/м.

Далее подсчитаем массу платформы и опорного основания. Платформа весит 2,25 МН. Разделив этот вес на ускорение свободного падения (9.81 м/с), получим $m_п = 230$ т. Вес опорного основания в воздухе легко подсчитывается как сумма весов отдельных элементов и оказывается равным 2,15 МН, что соответствует массе 220 т. Полагая в дальнейшем, что вертикальные колонны заполнены водой до уровня спокойной поверхности воды, найдем, что ее масса равна 96 т. Общая масса опорного основания, таким образом, равна $220 + 96 = 316$ т.

Присоединенная масса воды, связанная с движением сооружения в воде, подсчитывается как сумма присоединенных масс, соответствующих отдельным элементам. Из выражения (3.63) следует, что масса, приходящаяся на единицу длины вертикальных цилиндров, имеющих внешний диаметр D, равна $\rho(C_{ин} - 1)\pi D^2/4$, где ρ – плотность воды, а $C_{ин}$ – инерционный коэффициент. Принимая $C_{ин} = 2$ и умножая данное здесь выражение на длину L элемента, будем иметь $\rho\pi D^2 L/4$, т. е. присоединенная масса воды попросту равна массе воды, вытесненной элементом.

Для двух вертикальных колонн на стороне опорного основания, изображенной на рис. 4.39, получим

$$2 \cdot 1{,}003 \frac{\pi \cdot 1{,}2^2}{4} 22{,}5 = 51{,}04 \text{ т},$$

для двух нижних раскосов, которые можно рассматривать как вертикальные высотой 15 м,

$$2 \cdot 1{,}003 \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} 15 = 8{,}50 \text{ т}$$

для двух верхних раскосов, которые по аналогии равны по объему вертикальным элементам высотой 7,5 м,

$$2 \cdot 1{,}003 \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} 7{,}5 = 4{,}25 \text{ т}.$$

Отсюда, для стороны сооружения, изображенной на рисунке, присоединенная масса равна $51{,}04 + 8{,}50 + 4{,}25 = 63{,}79$ т. Удваивая это значение, имея в виду противоположную боковую сторону опорного основания, получим 127,58 т. Кроме того, на фронтальной стороне получим для верхних раскосов

$$2 \cdot 1{,}003 \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} 10{,}6 = 6{,}01 \text{ т}$$

и для нижних раскосов

$$2 \cdot 1{,}003 \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} 21{,}2 = 12{,}02 \text{ т}.$$

Для горизонтальной связи посередине высоты сооружения получим

$$1{,}003 \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} 15 = 4{,}25 \text{ т}.$$

Удвоив эти три последние присоединенные массы с учетом тыловой стороны и суммируя их с полученными ранее массами для боковых сторон, найдем, что общая присоединенная масса воды равна 172 т.

Теперь определим по (4.68) приведенную массу

$$m = m_п + \frac{1}{2} m_0 = 230 + \frac{1}{2} (316 + 172) = 474 \text{ т.}$$

Собственная частота θ колебаний сооружения согласно выражению (4.78) равна

$$\theta = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15{,}66 \cdot 10^6}{474 \cdot 10^3}} = 5{,}75 \text{ 1/с.}$$

И наконец, частота волны ω, определяемая по заданному ее периоду, равна $2\pi/9 = 0{,}698$ 1/с. Полагая $\epsilon/\theta = 0{,}08$ при $\omega/\theta = 0{,}121$, вычисляем по (4.77) коэффициент динамичности $u_0/u_{ст} = 1{,}02$. Коэффициент динамичности всего на 2 % больше единицы, следовательно, для этого сооружения вполне достаточно одного статического расчета.

Пример 4.10–2. Для гравитационной конструкции, представленной на рис. 4.40, необходимо установить достаточность одного статического расчета на волновую нагрузку с периодом 8 с. Сооружение состоит из железобетонной колонны с наружным диаметром 4,6 м, внутренним диаметром 3,35 м и высотой 24 м, установленной на фундаментном блоке высотой 6,1 м, и верхнего строения, имеющего вес 9 МН. Модуль упругости бетона примем равным 28 ГПа.

Жесткость этого простого сооружения $\boldsymbol{k}$, т. е. отношение между горизонтальной силой и соответствующим ей перемещением верха колонны, может быть легко определена, если пренебречь перемещениями в основании колонны, по формуле $\boldsymbol{k} = 3EI/L^3$, где $\boldsymbol{E}$ – модуль Юнга материала колонны; $\boldsymbol{L}$ – длина колонны; $\boldsymbol{I}$ – момент инерции ее поперечного сечения. Отсюда при $\boldsymbol{E} = 28$ ГПа, $I = 14{,}3$ м^3, $L = 24$ м получим $\boldsymbol{k} = 87$ МН/м.

Весу платформы 9 МН соответствует масса $\boldsymbol{m}_п = 919$ м. Полагая удельный вес бетона равным 23 кН/м^3, найдем, что вес опорной колонны равен 4,05 МН. Соответствующая этому весу масса 413 т. Присоединенная масса воды для колонны

$$\frac{\rho\pi D^2 L}{4} = \frac{1{,}003 \cdot \pi \cdot 4{,}5^2 \, 24}{4} = 383 \text{ т.}$$

Применив выражение (4.68), получим теперь приведенную массу $\boldsymbol{m} = 919 + 1/2\,(413 + 383) = 1317$ т.

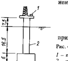


Рис. 4.40. К примеру 4.10–2.

1 – платформа с оборудованием, весящие вместе 9 МН: *2* – железобетонная колонна ($D = 4{,}5$ м; $d = 3{,}3$ м; $E = 28$ ГПа).

Собственная частота колебаний сооружения, определенная по (4.78), равна

$$Q = \sqrt{k/m} = \sqrt{87 \cdot 10^6 / (1317 \cdot 10^3)} = 8{,}1 \text{ 1/с.}$$

Частота волн равна $2\pi/8 = 0{,}785$ 1/с, т. е. $\omega/\theta = 0{,}097$. Приняв $\epsilon/\theta = 0{,}08$, из выражения (4.77), найдем коэффициент динамичности $u_0/u_{ст} = 1{,}01$, отличающийся от единицы всего на 1 %. Таким образом, для данного сооружения достаточно проведения только статических расчетов.

Задачи

1. Опорное основание буровой платформы (рис. 4.41) состоит из четырех стальных колонн, имеющих внешний диаметр 1,22 м и стенку толщиной 25 мм. Колонны связаны поверху четырьмя горизонтальными элементами внешним диаметром 0,61 м и толщиной стенки 12,5 мм и полагаются жестко защемленными понизу (в узлах *1* и *3*). Соотношение между перемещениями узлов *2* и *4* и приложенными к этим узлам усилиями выражается с помощью обращенной матрицы жесткости, которая получена с использованием методов, приведенных в главе 2,

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = 10^{-8} \begin{bmatrix} 9136 & & & \text{Симметрично} & & \\ 66{,}22 & 154{,}6 & & & & \\ 3786 & 4{,}346 & 350{,}5 & & & \\ 91190 & 66{,}22 & 3779 & 91364 & & \\ -66{,}22 & 0{,}1016 & -4{,}346 & -66{,}2 & 154{,}6 & \\ 3779 & 4{,}346 & 1460 & 3787 & -4{,}346 & 350{,}6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 x \\ F_2 y \\ M_2 \\ F_4 x \\ F_4 y \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

Здесь u и v в метрах, θ в радианах, F в килоньютонах, M в килоньютон-метрах.

А. Используя методы главы 3, определить максимальное значение горизонтальной волновой нагрузки и соответствующий ей параметр ωt при воздействии на сооружение, как трехмерную систему, волн Эри высотой 6 м и длиной 90 м. Глубину воды в месте стоянки буровой платформы принять равной 24 м, а коэффициенты $C_{ск}$ и $C_{ин}$ соответственно равными 1 и 2.

Ответ: 287 кН; $\omega t = 5{,}8$.

Б. Используя методы главы 3, определить узловые нагрузки от волнового воздействия, описанного в п. А, при значении ωt, соответствующем максимальной волновой нагрузке.

В. Определить наибольшие значения нормальных напряжений (с учетом продольной силы и изгибающего момента), возникающие в элементах *1–2, 3–4, 2–4*, при услови, что помимо волновой нагрузки боковая сторона опорного основания,

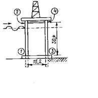


Рис. 4.41. К задаче 1.

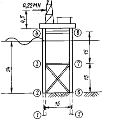


Рис. 4.42. К задаче 2.

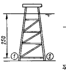


Рис. 4.43. К задаче 8.

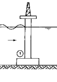


Рис. 4.44. К задаче 17.

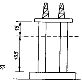


Рис. 4.45. К задаче 20.

показанная на рисунке, испытывает нагрузку от собственного веса 1,1 МН, ветровую нагрузку, равнодействующая которой равна 0,22 МН и приложена на 3 м выше элемента *2–4*, а также нагрузку от собственного веса элементов.

Ответ: –86 МПа, –146 МПа, –271 МПа соответственно.

Г. Определить коэффициент динамичности системы при условии, что колонны заполнены водой, а общий вес верхнего строения составляет 2,2 МН.

Ответ: 1,08 при $\epsilon/\theta = 0{,}08$.

2. Опорное основание буровой платформы (рис. 4.42), выполненное из стали, подвергается воздействию волн Эри высотой 7,5 м и длиной 105 м. Все четыре стороны сооружения идентичны. Вертикальные элементы имеют внешний диаметр 1,20 м и стенку толщиной 40 мм. Горизонтальные и наклонные элементы имеют внешний диаметр 0,60 м и стенку толщиной 12 мм и не заполнены водой. Эквивалентные сваи имеют длину $l = 4{,}5$ м, площадь и момент инерции поперечного сечения соответственно $A = 0{,}015$ м² и $I = 0{,}02$ м⁴. Боковая сторона опорного основания испытывает нагрузку от собственного веса верхнего строения 1,35 МН и ветровую нагрузку, равнодействующая которой равна 0,22 МН и приложена на 4,5 м выше элемента *4–8*. Определить максимальные значения нормальных напряжений (с учетом продольной силы и изгибающего момента) в элементах *2–7* и *6–7*, используя результаты, полученные при решении задач 14 в главе 2, а также 24, 25 и 26 в главе 3.

3. Для условий, указанных в задаче 2, определить коэффициент динамичности и установить, может ли быть достаточным статический расчет.

4. Используя данные табл. 4.3, определить максимальные напряжения в элементе *6–7* сооружения, рассмотренного в примере 4.2–1.

5. Решить задачу 4 для элемента *4–8*.

6. В наклонном элементе, связывающем узлы сооружения, возникают сжимающие нормальные напряжения 140 МПа. Полагая $\sigma_{кр} = 240$ МПа и $C_m = 1{,}0$, определить степень увеличения изгибающего момента от продольного сжатия.

Ответ: $\alpha = 2{,}33$.

7. Решить пример 4.3–1 при длине вертикальных элементов 12 м.

8. Незаполненный водой элемент *1–2* опорного основания буровой платформы (рис. 4.43) имеет внешний диаметр 0,90 м, стенку толщиной 18 мм и расположен на глубине 250 м ниже поверхности воды. Определить максимальные значения нормального осевого напряжения σ_z и нормального тангенциального напряжения σ_θ в элементе, обусловленные гидростатическим давлением.

Ответ: $\sigma_z = -31{,}2$ МПа; $\sigma_\theta = -62{,}5$ МПа.

9. Определить в концевых сечениях элемента *1–2*, рассмотренного в задаче 8, наибольшие сжимающие осевые нормальные напряжения σ_z и связанные с ними нормальные тангенциальные напряжения σ_θ гидростатического давления.

Ответ: $\sigma_z = -127{,}5$ МПа; $\sigma_\theta = 38{,}2$ МПа.

10. В задаче 9 найти наибольшие растягивающие нормальные осевые напряжения и связанные с ними нормальные тангенциальные напряжения.

Ответ: $\sigma_z = 65{,}0$ МПа; $\sigma_\theta = 19{,}5$ МПа.

11. Проверить допустимость напряжений, определенных в задаче 8, если предел текучести стали равен 250 МПа.

Ответ: $|\sigma_N/[\sigma_N]| = 0{,}21$; $|\sigma_\theta/[\sigma_\theta]| = 1{,}69$, т. е. критерий прочности в виде (4.28) не удовлетворяется.

12. Показать, что кольцевые подкрепления, размещенные через 3,75 м по длине элемента *1–2* в задаче 8 понижают отношение до 0,9.

13. В задаче 12 найти ширину колец, имеющих толщину 90 мм.

Ответ: 110 мм.

14. Оценить касательное напряжение, соответствующее продавливанию опорной колонны буровой платформы, при условии, что толщина стенки колонны равна 25 мм, а присоединенный к ней под углом 55° раскос радиусом 0,30 м передает нормальную к оси колонны силу 0,9 МН и момент 0,55 МН · м.

Ответ: $\tau_п = 78{,}85$ МПа.

15. Оценить срок службы узла, работающего в режиме, указанном ниже:

Н, м	12–18	6–12	3–6	1,5–3	0,9–1,5	0–0,9
Т, с	12	10	9	7	4	3
с, %	0,01	0,03	0,10	1,00	10,00	88,86
σ, МПа	35	20	10	4	3,5	1,5

Коэффициент концентрации напряжений принять равным 2,0.

Ответ: $T \approx 20$ лет.

16. Решить задачу 15 при условии, что динамический характер воздействия волн с периодом 4 с и меньше приводит к увеличению напряжений на 50 %.

Ответ: $T \approx 14$ лет.

17. Опорное основание платформы с оборудованием (рис. 4.44) относится к гравитационному типу и выполнено в виде одиночной бетонной колонны наружным и внутренним радиусами, равными соответственно 1,80 м и 1,35 м. На фундаментную часть сооружения, находящуюся на глубине 18 м от поверхности воды, от колонны передаются усилия $f_{1x} = -1{,}14$ МН; $f_{1y} = 18{,}3$ МН и $m_1 = -17{,}2$ МН · м.

А. Определить суммарную площадь сечений симметрично размещенных арматурных пучков, необходимую для исключения растяжения бетона при изгибе колонны. Принять расчетное предварительное напряжение в пучках равным 1,05 ГПа.

Ответ: $A_а = 60$ см².

Б. Определить значение изгибающего момента, соответствующее образованию трещин в колонне.

Ответ: $M_т = 28{,}8$ МН · м.

В. Рассчитать предельное значение изгибающего момента, которое может нести опорная колонна без опасности раздробления бетона, полагая размещение арматурных пучков таким же, как в примере 4.8–2.

Ответ: $M_о = 44$ МН · м.

18. Пересмотреть пример 4.9–1 при наружном давлении воды 1,4 МПа.

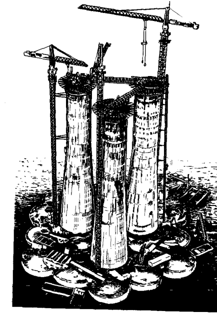
19. Пересмотреть пример 4.9–1 при условиях, что наружное давление воды равно 1,4 МПа, а днище цилиндрической ячейки фундамента имеет форму эллипсоида с отношением высоты к радиусу основания, равным 0,5.

20. Опорное основание буровой платформы (рис. 4.45) относится к гравитационному типу и выполнено в виде четырех железобетонных колонн, поддерживающих платформу с оборудованием общим весом 90 МН. Внешний и внутренний радиусы сечения колонн равны соответственно 15,2 и 14,6 м. Полагая колонны незаполненными водой, определить коэффициент динамичности сооружения при волнении с периодом 10 с. По расчетам горизонтальная нагрузка 0,45 МН, приложенная к верхнему строению, вызывает его перемещение на 1,52 мм. Принять $\gamma_Б = 23$ кН/м и $\epsilon/\theta = 0{,}05$.

Ответ: $u_о/u_{ст} = 1{,}08$.

21. Определить коэффициент динамичности для сооружения и при параметрах волнения, указанных в примере 4.2–1. Вертикальные колонны считать заполненными водой. Расчеты одной боковой стороны опорного основания с учетом жесткости эквивалентных свай показывают, что горизонтальная нагрузка 1 МН, приложенная к верхнему строению, вызывает перемещение его на 0,135 м.

Ответ: $u_о/u_{ст} = 1{,}02$ при $\epsilon/\theta = 0{,}08$.



Возведение опор гравитационной платформы „Кондип".

5. РАСЧЕТ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

В главе 4 внимание было сконцентрировано на расчете *конструкций морских гидротехнических сооружений, было показано, как* при заданных воздействиях окружающей среды можно определить *напряженное состояние отдельных элементов конструкции. В данной главе* развиваются методы расчета, позволяющие учесть взаимодействие сооружения с грунтовым основанием. Задачей расчета сооружений ферменного типа является оценка несущей способности грунтового основания и определение усилий в сваях. В случае рассмотрения сооружений гравитационного типа в расчет включается оценка несущей способности основания и усилий, действующих на фундамент сооружения.

5.1. Характеристики грунтов

Грунты, составляющие морское дно, относятся к *осадочным* породам и состоят в основном из частиц, зерен или обломков скалы с возможным включением материалов органического происхождения, различных по гранулометрическому составу. Они могут быть отнесены к самым разным классификационным категориям в зависимости от размеров частиц и их пластичности или непластичности при насыщении водой, т. е. способности или неспособности к формованию без трещин и расслоения. Основные две категории грунта – это *пески и глины*. Пески, с одной стороны, характеризуются как непластичная среда с частицами размерами от 5 до 0,075 мм. С другой стороны, глины характеризуются как пластичные грунты с частицами менее 0,075 мм. К третьей категории грунтов, с которыми приходится иметь дело в морских условиях, относятся *илы* – относительно непластичные грунты с частицами размером менее 0,075 мм. Донные отложения представлены большей частью смесью грунтов указанных трех категорий. Однако для инженерных целей они должны быть классифицированы более грубо: как глины или как пески в зависимости от их пластичного или непластичного поведения.

Грунты у поверхности морского дна и ниже полагаются обычно *водонасыщенными, т. е. все пустоты (поры) между частицами грунта полностью* заполнены водой. *Общее напряжение* в любой точке такого *водонасыщенного грунта может рассматриваться как сумма напряжений в скелете* грунта и порового давления.

Когда образец грунта подвергается равномерному и постепенно увеличивающемуся обжатию, то поначалу он ведет себя упруго, а затем, при достижении некоторого критического уровня напряжений, разрушается от сдвига, т. е. получает значительные смещения. За разрушающее принимается обычно такое значение обжатия грунта, при котором касательные напряжения достигают критического уровня, определяемого по эмпирической формуле Кулона

$$S = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi, \tag{5.1}$$

где c и φ – постоянные, характерные для данного вида грунта, а σ означает *эффективное напряжение* – нормальное по отношению к плоскости сдвига напряжение в скелете грунта. Используя данное определение эффективного напряжения, формулу Кулона (5.1) можно выразить через внешнее давление, нормальное к плоскости сдвига грунта. При этом возможны два крайних случая: внешнее давление полностью воспринимается поровой водой и внешнее давление полностью воспринимается скелетом грунта. В первом случае эффективное напряжение равно нулю, а во втором оно равно внешнему давлению (это зависит от типа грунта и продолжительности нагружения).

Вначале рассмотрим песчаные грунты. Они обладают высокой водопроницаемостью, вследствие чего внешнее давление не воспринимается поровой водой, которая сразу же выжимается из грунтовой массы. Эффективное напряжение может быть в этом случае принято равным внешнему давлению. Более того, экспериментально установлено, что сопротивление сдвигу у песков прямо пропорционально эффективному напряжению, т. е. формула Кулона (5.1) упрощается здесь до вида

$$S = \sigma_{\text{вн}} \operatorname{tg} \varphi, \tag{5.2}$$

где $\sigma_{\text{вн}}$ – обусловленное внешним давлением напряжение, нормальное к плоскости сдвига; φ – *угол трения* песка, определяемый по результатам испытаний образцов грунта в лабораторных условиях. Значения φ несколько изменяются в зависимости от плотности песка, но обычно лежат в пределах от 30 до 35°.

Рассмотрим теперь глинистые грунты. В противоположность песчаным эти грунты обладают низкой водопроницаемостью, поэтому в их часть внешнего давления в течение ощутимого интервала времени воспринимается поровой водой, и лишь после отвода поровой воды внешнее давление полностью передается на скелет грунта, как эффективное напряжение. Вследствие того что поровая вода практически несжимаема, в начальный момент загружения внешнее давление почти полностью воспринимается поровой водой.

Таким образом, оба предельных случая, о которых говорилось выше – это недренированное состояние, при котором эффективное напряжение равно нулю, и дренированное состояние, при котором эффективное напряжение равно внешнему давлению. В последнем случае, как показывают эксперименты, сопротивление сдвигу можно считать прямо

пропорциональным напряжению $\sigma_{\text{вн}}$, обусловленному внешним и нормальным к плоскости сдвига давлением. Формула Кулона (5.1) для глинистых грунтов в недренированном состоянии получает вид

$$S = c, \tag{5.3}$$

а дренированному состоянию соответствует формула

$$S = \sigma_{\text{вн}} \operatorname{tg} \varphi_{\text{д}}, \tag{5.4}$$

где c и $\varphi_{\text{д}}$ означают соответственно *сцепление и эффективный угол трения* глины.

Значения c и $\varphi_{\text{д}}$ могут быть установлены по результатам стандартных лабораторных испытаний образцов грунта, извлеченных с разных глубин. Сцепление образца грунта, исследуемое в условиях недренированной деформации, зависит от количества воды, содержащейся в грунте, т. е. от степени начальной компрессии и дренированности или консолидации грунта до опыта. Сцепление может принимать значения от близких к нулю до 200 кПа и больших. Ниже приведены значения сцепления в глинистых грунтах различной консистенции:

	Сцепление, кПа
Очень мягкая	<12
Мягкая	12 – 25
Средняя	25 – 50
Жесткая	50 – 100
Очень жесткая	100 – 200
Твердая	>400

Значения эффективного угла трения $\varphi_{\text{д}}$ изменяются в зависимости от степени пластичности глины, но обычно лежат в пределах от 20 до 40°.

Если в естественных отложениях грунта происходит его полное уплотнение, обусловленное действием собственного веса лежащих выше слоев, то такой грунт считают *нормально уплотненным*. Если грунт относится к сравнительно новым отложениям, он может оказаться *недоуплотненным*, и для того чтобы весовая нагрузка воспринималась полностью скелетом грунта, необходимо отжатие всей воды. Наконец, если поверхность нормально уплотненного грунтового отложения была подвержена эрозии или грунт был предварительно обжат, его плотность будет больше той, что отвечает обжатию под действием собственного веса, и в этом случае грунт считается *переуплотненным*.

5.2. Сваи для сооружений ферменного типа

Сооружения ферменного типа удерживаются в основном на стальных трубчатых сваях, забиваемых в грунт через опорные колонны. Они предназначены для несения нагрузок от верхнего строения и обеспечения устойчивости сооружения в целом в штормовых условиях.

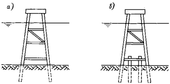


Рис. 5.1. Опорное основание ферменного типа с обычными (*а*) и дополнительными окаймляющими (*б*) сваями.

Сваи обладают определенной несущей способностью и могут сопротивляться сжимающим нагрузкам, приложенным к голове, вследствие действия вертикальных сил трения по боковой поверхности, возникающих при взаимодействии с окружающим грунтом, и вертикальных усилий со стороны грунта на нижний конец сваи. В большинстве случаев несущая способность сваи определяется в основном силами трения по боковой поверхности, и, так как эти силы возрастают с увеличением боковой поверхности, для возможности восприятия значительных нагрузок от верхнего строения необходимы сваи глубокого заложения.

Диаметры свай и глубина их погружения оказываются, конечно, различными для разных сооружений и зависят от общего числа свай в сооружении, расчетной нагрузки и грунтовых условий. Однако, обычно применяются сваи наружным диаметром от 0,6 до 1,5 м и толщиной стенки от 12 до 25 мм, а глубина их забивки – от 60 м и более. В некоторых случаях, когда грунты в основании слишком мягкие, в конструкции используются дополнительные *окаймляющие* сваи. Эти сваи, забитые по контуру сооружения и соединенные с ним, обеспечивают необходимую несущую способность свайного фундамента. Схемы сооружений с обычными и окаймляющими сваями показаны на рис. 5.1.

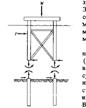


Рис. 5.2. Нагрузки на сваи от внешнего воздействия на опорную часть сооружения.

Сваи работают на усилия, возникающие от нагрузок на расположенное выше сооружение (рис. 5.2). Сжимающие усилия, возникающие в расчетных условиях, показанных на этом рисунке, часто превышают 5 МН. Из-за значительных опрокидывающих моментов под воздействием ветра и волн в сваях могут возникнуть и растягивающие усилия того же порядка. Ветровые и волновые нагрузки создают также значительные поперечные силы и моменты в сваях, достигающие в сечениях на уровне поверхности грунта значений 0,5 МН и 1,5 МН · м, соответственно, и даже больших.

Они в свою очередь обусловливают существенные перемещения как свай на уровне поверхности грунта, так и опирающегося на них сооружения.

В связи с изложенными особенностями работы свайного фундамента в составе сооружений ферменного типа выделим три основных вопроса, связанных с их расчетом:

1. Определение несущей способности сваи, забитой на заданную глубину и находящейся под действием осевой нагрузки.

2. Определение упругой реакции сваи на осевую нагрузку, не превышающую несущую способность.

3. Определение упругой реакции сваи на горизонтальную нагрузку и момент, приложенные к ней на уровне поверхности грунта.

Первая задача имеет важное значение при определении глубины забивки сваи в грунт, достаточной для восприятия осевой нагрузки от сооружения. Ее решение необходимо и при рассмотрении вопросов, связанных с постановкой проектируемого сооружения на место эксплуатации. Наконец, решение этой задачи требуется при оценке предполагаемого конструктивного решения. Может получиться так, что требуемая по расчету глубина забивки превысит ту, достижение которой возможно с помощью имеющегося в распоряжении сваебойного оборудования. В этом случае потребуется изменение проектного решения с целью увеличения числа свай и уменьшения глубины их погружения. Вторая и третья задачи дают решения об упругих перемещениях свай на уровне поверхности грунта при нагрузках, передаваемых на них от сооружений. Эти решения необходимы для оценки жесткостных характеристик эквивалентных свободно стоящих свай, заменяющих действительные сваи в расчетной схеме сооружения, как это было показано в главе. 4. Последняя задача важна и для расчета самих свай, так как горизонтальные нагрузки обычно вызывают в них значительные напряжения от изгиба, достигающие максимума на некоторой глубине ниже поверхности морского дна.

Расстояния между сваями в морских гидротехнических сооружениях ферменного типа обычно достаточно велики (более 5–10 диаметров свай), поэтому можно пренебречь взаимодействием свай через грунт. Таким образом, при определении упругой реакции каждая свая может рассматриваться изолированной от других. Можно пренебречь также осадкой свай, связанной с обжатием грунта, частично из-за того, что усилия от обжатия грунта большей частью, если не всегда, на один или несколько порядков меньше усилий, обусловленных экстремальными внешними воздействиями на сооружение. Кроме того, сваи глубокого заложения передают нагрузку на грунт в основном в виде вертикальных касательных усилий, распределенных по боковой поверхности, а эти усилия не вызывают обжатие грунта.

5.3. Определение несущей способности сваи при действии осевых нагрузок

Сопротивление жесткой цилиндрической сваи при действии осевой сжимающей нагрузки значительному вертикальному перемещению обычно является результатом совместного действия касательных усилий, распределенных по боковой поверхности сваи, и нормальных усилий на ее нижнем конце. Это положение распространяется и на трубчатые сваи с открытым нижним концом, в которых при забивке образуется плотный грунтовый сердечник, обладающий значительно большим сопротивлением на перемещения при статическом нагружении, чем грунт в основании сваи. Таким образом, для трубчатых свай с открытым нижним концом, применяемых главным образом в строительстве на морском шельфе, несущая способность Ф в предположении о несжимаемости сваи может быть представлена формулой

$$\Phi = \Phi_\tau + \Phi_\sigma, \tag{5.5}$$

где, как показано на рис. 5.3, Φ_τ означает сопротивление грунта по боковой поверхности сваи, а Φ_σ – сопротивление грунта под нижним концом сваи.

Определим сопротивление грунта по боковой поверхности сваи. Обозначим s сопротивление грунта, отнесенное к единице площади боковой поверхности, и проинтегрируем эту величину по всей боковой поверхности сваи, контактирующей с грунтом. Полагая в общем случае, что s изменяется с увеличением глубины, получим

$$\Phi_\tau = \pi D \int_0^L s\,dy, \tag{5.6}$$

где D – наружный диаметр сваи; L – глубина погружения сваи в грунт.

Обозначим q отнесенное к единице площади сопротивление грунта под нижним концом сваи, тогда

$$\Phi_\sigma = q\,(\pi D^2/4), \tag{5.7}$$

где q может, вообще говоря, зависеть от глубины L погружения сваи.

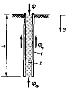


Рис. 5.3. Силы, действующие на сваю.

1 – ствол сваи; *2* – грунтовый сердечник.

Окончательно, если обозначить F предельную осевую нагрузку на сваю, приложенную на уровне поверхности грунта, а $w_{св}$ погонный вес сваи с грунтовым сердечником с учетом взвешивающего действия грунтовой воды, то

$$\Phi = F + w_{св}L. \tag{5.8}$$

На основании формул (5.5)–(5.8) *можно* теперь получить выражение для предельной сжимающей нагрузки на сваю

$$F_{сж} = \pi D \int_0^L s\,dy + q\,\frac{\pi D^2}{4} - w_{св}L, \tag{5.9}$$

несущая способность сваи на растягивающие нагрузки определяется как

$$F_р = \pi D \int_0^L s\,dy + w_{св}L, \tag{5.10}$$

Условие отсутствия проскальзывания грунтового сердечника, при котором были выведены приведенные выше формулы,

$$q\,\frac{\pi d^2}{4} < \pi d \int_0^L s\,dy + w_{гр}L, \tag{5.11}$$

где d – внутренний диаметр сваи, а $w_{гр}$ – погонный вес грунтового сердечника с учетом взвешивающего действия грунтовой воды.

Для возможности использования полученных здесь выражений необходимо установить связь величин s и q с характеристиками грунта. Если грунты глинистые, упомянутые величины связаны с измеряемым значением *сцепления* (*или прочности на сдвиг в недренированном состоянии*) соотношениями

$$s = \alpha c;\ q = N_c c, \tag{5.12}$$

где α и N_c – безразмерные коэффициенты. Для песчаных грунтов величины s и q определяются весом лежащих выше слоев грунта и углом трения δ по контакту сваи с грунтом

$$f = K\gamma_{гр} y \operatorname{tg}\delta;\ q = N_q \gamma_{гр} L, \tag{5.13}$$

где $\gamma_{гр}$ – удельный вес грунта с учетом взвешивающего действия грунтовой воды; K и N_q – безразмерные коэффициенты.

Параметры грунтов, определяющие несущую способность сваи [25, 34]

Глина	Песок
$\alpha = 1{,}0$; $0 < c < 25$ кПа;	$\delta = 30°$; $\gamma_{гр} = 6{,}5 \div 11$ кН/м^3;
$\alpha = 1{,}25 - 0{,}01c$; $25 < c < 75$ кПа;	$K = 0{,}7$; $s_{max} = 100$ кПа;
$\alpha = 0{,}5$; $c > 75$ кПа;	$N_q = 40$; $q_{max} = 10$ МПа
для всех глин $N_c = 9$.	

Заметим, что для песка по формулам (5.13) находятся предельные значения величин s и q.

Пример 5.3–1. Определим глубину забивки стальной сваи диаметром 1,22 м со стенкой толщиной 25 мм, соответствующую несущей способности на сжимающую нагрузку, равной 9 МН (рис. 5.4). Глинистый грунт, в который забивается свая, имеет в недренированном состоянии прочность на сдвиг, пренебрежимо малую на уровне поверхности грунта и возрастающую линейно с увеличением глубины до 180 кПа на отметке 120 м ниже поверхности. Удельный вес стали (в воздухе) равен 76 кН/м^3, а грунта 15,5 кН/м^3.

Итак, сопротивление сдвигу на глубине y равно $c = by$; $b = 1{,}5$ кН/м^3.

а) б)

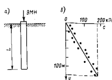


Рис. 5.4. Схема нагружения сваи (*а*) и изменение сцепления грунта по глубине (*б*) по данным экспериментальных исследований (точки на графике).

Для глинистого грунта находим $s = ac$, которое изменяется с увеличением глубин следующим образом: $s = s_1 = by$ при $0 < y < 16{,}67$ м; $s = s_2 = 1{,}25by - 0{,}01\,(by)^2$ при $16{,}67 < y \leqslant 50$ м; $s = s_3 = 0{,}5\,by$ при $y > 50$ м, а величина q при $y = L$ находится как $q = 9c = 9bL$.

Суммарный погонный вес сваи с грунтовым сердечником с учетом взвешивающего действия грунтовой воды подсчитываем по формуле $w_{св} = \gamma_{ст}A_{ст} + \gamma_{гр}A_{гр}$, где $\gamma_{ст}$ и $\gamma_{гр}$ означают соответственно удельные веса стали и грунта с учетом взвешивающего действия воды, а $A_{ст}$ и $A_{гр}$ – площади поперечных сечений стали и грунтового сердечника. Удельные веса стали и грунта в воде получаются вычитанием удельного веса воды из соответствующих удельных весов в воздухе, т. е. $\gamma_{ст} = 76 - 10 = 66$ кН/м^3; $\gamma_{гр} = 15{,}5 - 10 = 5{,}5$ кН/м^3. Таким образом, $w_{св} = 66\,(\pi/4)\,(1{,}22^2 - 1{,}17^2) + 5{,}5\,(\pi/4)\,1{,}17^2 = 12{,}1$ кН/м.

Глубину забивки сваи определим с помощью выражения (5.9). Полагая, что $L > 50$ м, найдем, приняв во внимание полученные выше выражения для s, что

$$\int_0^L s\,dy = \int_0^{16,7} s_1\,dy + \int_{16,7}^{50} s_2\,dy + \int_{50}^{L} s_3\,dy,$$

откуда

$$\int_0^L s\,dy = 450 + 0{,}375L^2.$$

Подставив этот результат в выражение (5.9) и использовав $q = 9c = 13{,}5L$, получим при $F_{сж} = 9$ МН и $w_{св} = 12{,}1$ кН/м уравнение $1{,}437L^2 + 3{,}681L - 7275 = 0$, решив которое найдем $L = 69{,}9$ м.

Если в решение задачи ввести коэффициент запаса, равный, скажем, 1,5, то это будет означать снижение нагрузки, получаемой по выражению (5.5), в 1,5 раза. Из выражения (5.8) видно также, что это эквивалентно увеличению в 1,5 раза значений F и $w_{св}L$ в формуле (5.9). Решив задачу заново при $F_{сж} = 13{,}5$ МН, получим $L = 89{,}2 \approx 90$ м.

Отметим, что этот результат, как и предыдущий, удовлетворяет принятому вначале положению, что $L > 50$ м. Если бы это условие не подтвердилось, то следовало бы решить задачу еще раз, полагая $16{,}67 < L < 50$ м, и в качестве подынтегральной функции в (5.9) принимать только первые две из полученных выше зависимостей для s: $s = s_1$ и $s = s_2$. При этом интеграл от s_1 имел бы пределы от 0 до 16,7 м, а интеграл от s_2 – от 16,7 до L. Если же и в результате решения этой задачи получится

$L < 16{,}7$ м, то придется повторить решение, используя только первую зависимость для s, т. е. $s = s_1$ и вычисляя интеграл в (5.9) в пределах от 0 до L.

Нетрудно убедиться, что условия (5.11) об отсутствии проскальзывания грунтового сердечника сваи удовлетворяются. Действительно, при $L = 90$ м

$$q\,(\pi d^2/4) = 1306 \text{ кН}; \quad \pi d \int_0^{90} s\,dy = 12824 \text{ кН};$$

$$w_{гр}L = 121 \text{ кН и } 1306 < 12824 + 121.$$

Пример 5.3–2. Для сооружения, схема которого и условия нагружения показаны на рис. 5.5, определим глубину забивки свай с наружным диаметром 1,82 м и толщиной стенки 25 мм в грунт, характеристики которого заданы в примере 5.3–1. Величины, обозначенные на схеме, имеют следующие значения: $F_H = 13$ МН, $F_V = 9$ МН, $b = 45$ м, $d = 20$ м. Отметим, что наихудшие условия для работы свай создаются, когда ветровые и волновые нагрузки совпадают по направлению и действуют под углом 45° к фронтальной стороне сооружения (см. рис. 5.5, *а*). Упрощенная схема распределения нагрузок на сваи показана на рис. 5.5, *б*.

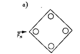
По условию равновесия вертикальных сил $4W = F_V$, а из условия равенства моментов сил относительно левой сваи $d(2W) = 2d(W + F) = bF_H + dF_V$.

Решив эти два уравнения, получим

$$W = F_V/4; \quad F = bF_H/2d.$$

Подставив численные значения величин, найдем $W = 2{,}25$ МН, $F = 14{,}62$ МН. Максимальная сжимающая нагрузка на сваю (расположенную справа) $F_{сж} = W + F = 16{,}87$ МН, а максимальная растягивающая нагрузка на сваю (расположенную слева) $F_р = W - F = -12{,}37$ МН. Рассчитав сваю на максимальную сжимающую нагрузку с учетом

а)



б)

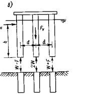


Рис. 5.5. К примеру 5.3–2: *а* – вид платформы сверху; *б* – упрощенная схема распределения нагрузок на сваи.

коэффициента запаса, равного 1,5, получим по способу, примененному в предыдущем примере, что сваи должны быть забиты на глубину 101,4 м. По формуле (5.10) найдем, что при таком заглублении несущая способность сваи на растягивающую нагрузку равна 25,88 МН, чему соответствует коэффициент запаса, равный 25,88/12,37 = 2,1.

5.4. Упругая реакция свай на осевую нагрузку

В предыдущем параграфе рассмотрен вопрос о несущей способности свай при осевом нагружении. Если внешние воздействия таковы, что несущая способность сваи не исчерпана, то вертикальные перемещения свай сдерживаются в основном упругим сопротивлением грунта сдвигу по боковой поверхности сваи. Безусловно, некоторую роль в сопротивлении свак перемещениям играют и нормальные напряжения, возникающие под нижним концом сваи. Однако, поскольку боковая поверхность глубоко заложенной сваи по площади значительно превосходит нижний торец, вклад действующих по контакту с ним напряжений в грунте относительно невелик и может не учитываться.

Ниже рассматривается в упрощенной постановке упругая реакция сваи на осевую сжимающую или растягивающую нагрузку. В более точной постановке этот вопрос рассмотрен в [8].

Схема к определению упругой реакции сваи показана на рис. 5.6. Полагается, что нагрузка F_0, приложенная к свае на уровне поверхности грунта, не превосходит несущую способность сваи. Упругое сопротивление грунта сдвигу s_a, отнесенное к единице площади поверхности сваи, таково, что не происходит движения сваи. Предположим, что эта величина зависит от наружного диаметра сваи D, продольного смещения v и упругой характеристики грунта k_a, имеющей размерность силы, деленной на площадь. Представив линейно-упругую реакцию грунта в безразмерной форме, получим $s_a/k_a = v/D$, или после умножения обеих частей равенства на k_a

$$s_a = k_a v/D, \tag{5.14}$$

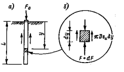


Рис. 5.6. Усилия, действующие на сваю (*а*) и ее элементарный участок (*б*) при осевой сжимающей нагрузке.

где сопротивление s_a считается положительным, если направлено вверх, и продольное смещение v положительным, если оно направлено вниз.

Уравнение равновесия элементарного отрезка сваи (рис. 5.6, *б*) легко может быть получено в виде

$$\frac{dF}{dy} = -\pi D f_a, \tag{5.15}$$

где F означает продольную силу (положительную, если соответствует сжатию) в свае на расстоянии y ниже поверхности грунта. Если A – площадь кольца – поперечного сечения трубы, несущей внешнюю нагрузку, а $\epsilon = -dv/dy$ – продольная деформация сваи (положительная при сжатии), то по закону Гука имеем

$$F = EA\epsilon = -EA\frac{dv}{dy}. \tag{5.16}$$

Скомбинировав выражения (5.15) – (5.16), получим дифференциальное уравнение для осевых перемещений сваи

$$\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{\pi k_a}{EA} v = 0. \tag{5.17}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y, \tag{5.18}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi k_a}{EA}}; \tag{5.19}$$

C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Они могут быть определены из условий $F = F_0$ при $y = 0$; $F = 0$ при $y = L$.

Использовав выражение (5.16), найдем по этим условиям, что $C_1 = (F_0/EA\alpha)\operatorname{cth}\alpha L$; $C_2 = -F_0/EA\alpha$.

Подставив выражения постоянных в уравнение (5.18), получим формулу для продольного смещения сечения сваи на уровне y ниже поверхности грунта

$$v = (F_0/EA\alpha)(\operatorname{cth} L \operatorname{ch} \alpha y - \operatorname{sh} \alpha y). \tag{5.20}$$

Наибольший интерес здесь представляет соотношение между нагрузкой и перемещением на уровне поверхности грунта. Полагая в (5.20) $y = 0$, найдем

$$F_0 = K_0 v, \qquad (5.21)$$

где

$$K_0 = EA\alpha \operatorname{th} \alpha L \qquad (5.22)$$

— *эффективная жесткость сваи при продольном перемещении ее головы* от осевой нагрузки.

Для возможности использования последнего выражения необходимо знать упругую характеристику грунта k_a. Она может быть определена путем применения формул (5.19) и (5.22) к результатам испытания сваи в полевых условиях. В частности, значение K_0 может быть определено непосредственно по приложенной к свае нагрузке и замеренной осадке головы сваи, а затем при известных размерах поперечного сечения сваи и глубины ее погружения с помощью выражений (5.19) и (5.22) определяется значение k_a.

Значения k_a по данным полевых испытаний [7, 35]

Грунт	k_a, МПа
Глина	7,5
Песок	9,0

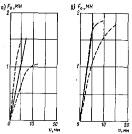


Рис. 5.7. Связь между осадкой головы сваи и осевой сжимающей нагрузкой: *а* – сваи с жесткостью EA = 2,14 МН, погруженные на глубину L = 15,2 м в глинистый грунт; *б* – сваи с жесткостью EA = = 3,71 МН, погруженные на глубину L = 21 м в песчаный грунт.

— — — данные полевых испытаний ([17] для глинистых грунтов, [35] для песчаных грунтов); —·— расчет по уравнению (5.17).

На рис. 5.7, *а* представлены результаты испытаний свай в натурных условиях и сопоставление их с результатами расчетов, выполненных с использованием вышеприведенных данных.

Пример 5.4–1. Определим эффективную осевую жесткость сваи диаметром 1,22 м со стенкой толщиной 25 мм, которая забита в глинистый грунт до глубины 60 м. Примем E = 210 ГПа, тогда при A = 0,0938 м² получим EA = 19,7 ГН. Для глинистых грунтов k_a = = 7,5 МПа, тогда α = $= \sqrt{\pi k_a / EA}$ = 0,0346 1/м. Теперь по формуле (5.22) получим K_0 = 688 МН/м.

5.5. Реакция сваи на циклическую горизонтальную нагрузку

Цилиндрические горизонтальные сила и момент, действующие на сваю на уровне поверхности грунта и возникающие под влиянием волнового воздействия на сооружение морского шельфа, вызывают горизонтальные *смещения прилегающего к свае грунта, которые, изменяясь* с увеличением глубины так же, как и отпор грунта, достигают максимальных значений вблизи поверхности грунта и убывают с увеличением глубины, как показано на рис. 5.8. Для определения реакции сваи на такие нагрузки необходимо представить в аналитической форме отпор грунта так, чтобы учесть и работу верхних слоев, где могут происходить значительные смещения грунта и пластические деформации, и работу нижних слоев грунта, находящегося в упругой стадии.

Ниже дается упрощенное представление отпора грунта с целью получения решения о перемещениях сваи под действием горизонтальной нагрузки и момента. Более детальное изложение этого вопроса дано в работах [24, 35, 36].

Примем, что отпор грунта p, отнесенный к единице длины сваи, зависит в общем случае от диаметра сваи D, горизонтального смещения u и двух параметров σ и k, характеризующих прочность и упругие свойства грунта, соответственно, и имеющих размерность напряжений. Соотношение между этими величинами может быть представлено в безразмерной форме как

$$p/kD = f\,(u/D,\ \sigma/k)\,, \qquad (5.23)$$

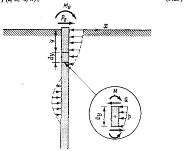


Рис. 5.8. Свая, подверженная действию горизонтальной нагрузки и момента.

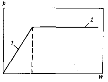


Рис. 5.9. Упрощенное представление зависимости отпора грунта от прогиба сваи.

1 – упругая стадия; *2* – пластическая стадия.

где f – функция произвольного вида. В последующем вид этой функции будет ограничен простейшей зависимостью, изображенной на рис. 5.9, которая в аналитической форме может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} p &= ND\sigma \text{ при } u/D > \beta; \\ p &= ku \text{ при } u/D \leqslant \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (5.24)$$

где u – положительный прогиб оси сваи; N – некоторый коэффициент, а β определяется по условию пересечения обоих участков графика на рисунке, т. е.

$$\beta = N\sigma/k = u^*/D. \qquad (5.25)$$

Здесь u^* – прогиб сваи, соответствующий переходу от линейно изменяющегося (в упругой стадии) отпора грунта к постоянному (в пластической стадии).

В приведенных выше зависимостях допускается, как это обычно и делается в отношении грунтовых отложений, что прочность грунта, характеризуемая параметром σ, изменяется с увеличением глубины. Однако далее для упрощения задачи полагается, что характеристика упругости k грунта постоянная для достаточно однородных отложений грунта.

Ограничиваясь пока только случаем глинистых грунтов, примем, что *прочность их может быть полностью охарактеризована сцеплением с. Для* верхних слоев грунта (где возможны значительные горизонтальные смещения сваи) можно полагать, что прочность изменяется линейно с увеличением глубины, т. е.

$$\sigma = c = a + by, \qquad (5.26)$$

где a и b – постоянные для данного грунта. Подставив эту формулу в (5.24) и (5.25), получим выражения для реакции грунта, отнесенной к единице длины сваи,

$$\left.\begin{aligned} p &= ND\,(a + by) \text{ при } u/D > \beta; \\ p &= ku \text{ при } u/D \leqslant \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (5.27)$$

где

$$\beta = [N(a + by)]/k = u^*/D. \qquad (5.28)$$

Теперь рассмотрим песчаные грунты. Примем в этом случае, что напряжения на глубине y по контакту с боковой поверхностью сваи, возникающие при ее горизонтальном перемещении являются главными напряжениями, при этом прочность грунта может быть представлена в виде

$$\sigma = K_p \gamma_{\text{гр}} y, \qquad (5.29)$$

где $\gamma_{\text{гр}}$ – удельный вес грунта с учетом взвешивающего действия воды, а K_p выражается через угол трения песка

$$K_p = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}. \qquad (5.30)$$

Подставив (5.29) в выражения (5.24) и (5.25), получим окончательный вид зависимости для реакции песчаного грунта

$$\left.\begin{aligned} p &= NDK_p \gamma_{\text{гр}} y \text{ при } u/D > \beta; \\ p &= ku \text{ при } u/D \leqslant \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (5.31)$$

где

$$\beta = NK_p \gamma_{\text{гр}} y/k = u^*/D. \qquad (5.32)$$

Для определения реакции сваи на циклическую горизонтальную нагрузку рассмотрим, используя полученные выше зависимости, систему свая–грунт под действием горизонтального усилия и момента, приложенных со стороны части опоры, расположенной над грунтом (рис. 5.8). Положим для общности, что верхние слои грунта до глубины L_1 находятся в пластическом состоянии. Прогиб сваи определяется по известному уравнению изгиба балки

$$EI\,\frac{d^4u}{dy^4} = -p, \qquad (5.33)$$

где EI – изгибная жесткость сваи; u – прогиб, который считается положительным вправо; p – отпор грунта, который положителен, если соответствует положительному прогибу u.

Для пластической зоны ($y < L_1$) имеем как для глины, так и для песка

$$EI\,\frac{d^4u}{dy^4} = -P_1 - P_2 y, \qquad (5.34)$$

где для глинистых грунтов

$$P_1 = NDa;\ P_2 = NDb, \qquad (5.35)$$

а для песчаных грунтов

$$P_1 = 0;\ P_2 = NDK_p \gamma_{\text{гр}}. \qquad (5.36)$$

Проинтегрировав уравнение (5.34) и использовав граничные условия при $y = 0$

$$EI\frac{d^2u}{dy^2} = M_0;\; EI\frac{d^3u}{dy^3} = P_0, \tag{5.37}$$

где M_0 и P_0 – максимальные внешние момент и горизонтальная сила, приложенные к свае на уровне поверхности грунта, получим при $EI = \text{const}$, что

$$EIu = -\frac{P_1y^4}{24} - \frac{P_2y^5}{120} + \frac{P_0y^3}{6} + \frac{M_0y^2}{2} + C_1y + C_2. \tag{5.38}$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Далее рассмотрим упругую зону ($y \geqslant L_1$). Как для глины, так и для песка имеем уравнение

$$EI\frac{d^4u}{dy^4} + ku = 0, \tag{5.39}$$

решение которого для глубоко погруженных свай может быть записано в виде

$$EIu = e^{-\alpha y'}\,(C_3\cos\alpha y' + C_4\sin\alpha y'), \tag{5.40}$$

где $y' = y - L_1$ – расстояние от отметки $y = L_1$, являющейся границей между пластической и упругой зонами;

$$\alpha = (k/EI)^{1/4}. \tag{5.41}$$

Предположение о большой глубине погружения сваи означает, что

$$L - L_1 \geqslant 3/\alpha, \tag{5.42}$$

где L – общая длина сваи.

В полученном решении остались неопределенными пять постоянных: C_1, C_2, C_3, C_4 и L. Их можно найти с помощью выражения (5.28) для глинистых грунтов или (5.32) для песчаных грунтов вместе с условиями непрерывности на прогиб, поворот, изгибающий момент и поперечную силу в сечении $y = L_1$, относящемуся к пластической зоне, или $y' = 0$ в упругой зоне.

Замечая, что изгибающий момент M и поперечная сила Q определяются соотношениями

$$EI\frac{d^2u}{dy^2} = M;\; EI\frac{d^3u}{dy^3} = -Q, \tag{5.43}$$

можно легко получить из решения, справедливого для пластической зоны, момент M^* и поперечную силу Q^* в сечении $y = L_1$:

$$M^* = -\frac{P_1L_1^2}{2} - \frac{P_2L_1^3}{6} + P_0L_1 + M_0; \tag{5.44}$$

$$Q^* = P_1L_1 + \frac{P_2L_1^2}{2} - P_0. \tag{5.45}$$

Приравнивая эти решения к получаемым для упругой зоны при $y' = 0$, находим

$$C_3 = (\alpha M^* - Q^*)/2\alpha^3; \tag{5.46}$$

$$C_4 = -M^*/2\alpha^2. \tag{5.47}$$

Далее, использовав выражения (5.28) или (5.32), получим с помощью формул (5.40) и (5.41) уравнение

$$2(P_1 + P_2L_1) = M^*\alpha^2 - Q^*\alpha, \tag{5.48}$$

которое решается относительно L_1 совместно с уравнениями (5.44) и (5.45) способом последовательных приближений. Очевидно, если уравнению (5.48) удовлетворяет значение L_1, меньшее или равное нулю, то пластической зоны не существует, и реакция сваи в целом может быть определена с помощью решения, полученного для упругой стадии работы грунта, т. е. при $L_1 = 0$.

Если $L_1 > 0$, то оставшиеся две постоянные C_1 и C_2 определяются по условию, что прогиб и поворот в сечении $y = L_1$ пластической зоны равны соответствующим значениям, получаемым в сечении $y' = 0$ упругой зоны. Выразив эти постоянные через величины M^* и Q^*, определяемые по (5.44) и (5.45), найдем

$$C_1 = \frac{Q^* - 2\alpha M^*}{2\alpha^2} + \frac{P_1L_1^3}{6} + \frac{P_2L_1^4}{24} - \frac{P_0L_1^2}{2} - M_0L_1; \tag{5.49}$$

$$C_2 = \frac{(1 + 2\alpha L_1)\,M^*}{2\alpha^2} - \frac{(1 + \alpha L_1)\,Q^*}{2\alpha^3} - \frac{P_1L_1^4}{8} -$$

$$- \frac{P_2L_1^5}{30} + \frac{P_0L_1^3}{3} + \frac{M_0L_1^2}{2}. \tag{5.50}$$

Итак, все постоянные аналитического решения задачи получены как для глин, так и для песков для пластической и упругой зон в грунтовом основании.

Оценка значений коэффициента N и упругой характеристики k грунта, входящих в приведенные выше выражения, может быть получена по результатам полевых испытаний свай, в процессе которых измерялись смещения свай на уровне поверхности грунта и изменения изгибающего момента по длине сваи при различных значениях горизонтальной силы и момента, приложенных к голове сваи.

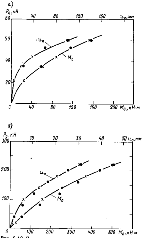


Рис. 5.10. Зависимость горизонтального перемещения u_0 сваи на уровне поверхности грунта и максимального изгибающего момента M_0 в свае от циклической горизонтальной нагрузки P_0: *а* – в мягкой глине [24]; *б* – в песке [35].

xxx полевые испытания; . . . расчет.

Значения характеристик грунта при циклических горизонтальных нагружениях по данным полевых испытаний [24, 35]

	N	k, МПа
Мягкие глины	3,5	22
Песок	1,8	8,3

На рис. 5.10 результаты полевых испытаний свай сопоставляются с расчетными, в которых использовались рекомендации, приведенные выше.

Пример 5.5–1. Рассмотрим трубчатую стальную сваю, характерную для сооружений морского шельфа (рис. 5.11). Свая диаметром 1,22 м и толщиной стенки 25 мм погружена под углом 8° на глубину 76 м. Циклические волновые нагрузки на сооружение являются причиной возникновения в свае на уровне поверхности грунта циклической горизонтальной силы P_0, достигающей максимального значения 0,67 МН, и циклического момента M_0 с максимальным значением 2,70 МНм. Направления усилий, соответствующие тому положению, когда волновая нагрузка на сооружение действует слева направо, показаны на рисунке. Сваи забиты в глинистый грунт, прочность которого пренебрежимо мала у поверхности и возрастает с увеличением глубины по закону $c = by$, где $b = 1{,}37$ кН/м^3. Определим прогиб и угол поворота сваи на уровне поверхности грунта, а также возникающие в ней максимальные напряжения.

Поскольку наклон сваи невелик ($\cos 8° = 0{,}9903$), будем рассчитывать ее как вертикальную. Будем полагать приемлемыми вышеприведенные рекомендации для глинистых грунтов. Тогда по формулам (5.35)

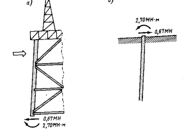


Рис. 5.11. К примеру 5.5–1: *а* – схема приложения усилий к участку сооружения, расположенному под грунтом; *б* – усилия, приложенные к свае на уровне грунта.

найдем, что $P_1 = 0$; $P_2 = 5{,}85$ кПа, и при $EI = 35{,}20$ МН/м^2 по выражению (5.41) найдем $\alpha = 0{,}281$ 1/м.

Сначала определим глубину L_1 пластической зоны, связанной с условиями нагружения. Решив уравнение (5.48) способом последовательных приближений, найдем $L_1 = 18$ м. Соответствующие этой глубине изгибающий момент и поперечная сила, вычисляемые по формулам (5.44) и (5.45) при $P_0 = 0{,}67$ МН и $M_0 = 2{,}70$ МНм, равны $M^* = 3{,}62$ МН · м; $Q^* = 0{,}28$ МН.

Далее по (5.46) и (5.47) вычисляются значения постоянных C_3 и C_4, соответствующие упругой зоне: $C_3 = 16{,}62$ МН · м^3; $C_4 = -22{,}8$ МН · м^3.

Аналогично по (5.49) и (5.50) вычисляются постоянные C_1 и C_2, соответствующие пластической зоне: $C_1 = -44{,}5$ МН · м^2; $C_2 = 705{,}6$ МН · м^3.

Зная постоянные, по выражению (5.38) найдем при $y = 0$, т. е. на уровне поверхности грунта прогиб u_0 и поворот $\theta = -du/dy$ сваи: $u_0 = 0{,}20$ м; $\theta_0 = 0{,}0128$ рад.

Использовав первое из уравнений (5.43) вместе с (5.38) для $y < L_1$ или с (5.40) для $y > L_1$, получим выражения для изгибающего момента в свае. Исследуя это выражение на экстремум, можно получить, что максимальный изгибающий момент равен 4,0 МН · м и действует в сечении на глубине 12,2 м.

Максимальное напряжение в свае от изгиба

$$\sigma = \frac{MR}{I} = \frac{4{,}0 \cdot 0{,}61}{1{,}68 \cdot 10^{-2}} = 145 \text{ МПа}.$$

Чтобы убедиться в согласованности полученного решения с принятым вначале допущением о достаточно большой глубине погружения сваи, проверим выполняется ли условие (5.42). Нетрудно убедиться, что это условие удовлетворяется, так как $L - L_1 = 76 - 18 = 58$ м, а $3/\alpha = 10{,}7$ м.

5.6. Жесткостные характеристики эквивалентных свай

Расчет опорной конструкции с учетом взаимодействия со свайным основанием может быть выполнен с помощью замены действительных, т. е. погруженных в грунт, свай эквивалентными – в виде защемленных понизу колонн, имеющих на уровне поверхности грунта такие же жесткостные характеристики, как и действительные сваи. Эти характеристики могут быть определены с использованием методов, изложенных в двух предшествующих параграфах.

В расчетной схеме на рис. 5.12, *а* действительные сваи у сооружения заменены эквивалентными (их концы обозначены *1* и *2*).

На основании результатов, полученных в главе 2, внутренние усилия f_{1x}, f_{1y}, m_1 и f_{2x}, f_{2y}, m_2, действующие по концам *1* и *2* сваи (рис. 5.12, *б*), могут быть связаны с ее перемещениями u_2, v_2

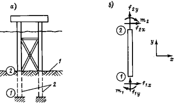


Рис. 5.12. К определению характеристик эквивалентной сваи: *а* – расчетная схема сооружения, в которой действительные сваи ниже поверхности грунта (*1*) заменены эквивалентными сваями (*2*); *б* – усилия, действующие на элемент – эквивалентную сваю.

и θ_2 на уровне поверхности грунта следующим соотношением:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & k_4 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_4 & 0 & \frac{1}{2} k_3 \\ k_1 & 0 & -k_4 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_4 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2, \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{5.51}$$

где k_1, k_2, k_3 и k_4 обозначают характеристики жесткости. Задача состоит в определении этих характеристик для любых заданных видов конструкций, нагрузок и свайных оснований.

Из соотношения (5.51) может быть легко получено выражение для усилий в сечении *2* сваи

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_4 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_4 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \tag{5.52}$$

При известных характеристиках жесткости это соотношение вместе с аналогичными ему для остальных свай могут быть включены в матричное уравнение, отвечающее расположенной выше части сооружения, и последнее может быть затем рассчитано так, как показано в главе 2 (см. пример 2.4–3).

Нетрудно убедиться, что коэффициент жесткости k_2, связывающий осевые усилие и перемещение, получается непосредственно из выражения (5.22). Определение остальных коэффициентов оказывается, однако, не столь же простым, поскольку в отличие от осевой реакции задача о боковом давлении грунта на сваю в действительности является нелинейной из-за текучести (пластичности) грунта, как это было показано в предыдущем параграфе. Нелинейность приводит к тому, что коэффициенты жесткости k_1, k_3 и k_4 оказываются в общем случае зависящими от значений горизонтальной нагрузки и момента, действующих на уровне поверхности грунта.

Перед тем, как вывести уравнения для определения этих коэффициентов, заметим, используя результаты, полученные в главе 2, что они выражаются через длину l и изгибную жесткость эквивалентной сваи следующим образом:

$$k_1 = 12EI/l^3;\; k_3 = 4EI/l;\; k_4 = 6EI/l^2, \tag{5.53}$$

т. е.

$$k_3 = (l^2/3)k_1;\; k_4 = (l/2)k_1. \tag{5.54}$$

Из матричного соотношения (5.52) следует, что

$$f_{2x} = k_1 u_2 - k_1 (l/2)\theta_2; \tag{5.55}$$

$$m_2 = -k_1(l/2)u_2 + k_1(l^2/3)\theta_2. \tag{5.56}$$

Исключив k_1 из этих двух уравнений, найдем

$$l^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{u_2}{\theta_2} - \frac{m_2}{f_{2x}}\right) l - \frac{3m_2}{f_{2x}}\,\frac{u_2}{\theta_2} = 0,$$

так что решение относительно l может быть представлено в виде

$$l = \frac{3}{4}\left(\frac{u_2}{\theta_2} - \frac{m_2}{f_{2x}}\right) + \sqrt{\frac{9}{16}\left(\frac{u_2}{\theta_2} - \frac{m_2}{f_{2x}}\right)^2 + 3\frac{m_2}{f_{2x}}\,\frac{u_2}{\theta_2}}. \tag{5.57}$$

Соответствующее решение для k_1 получается из (5.55) в виде

$$k_1 = \frac{f_{2x}}{u_2 - 0{,}5l\,\theta_2}. \tag{5.58}$$

По известным k_1 и l с помощью выражений (5.54) находятся k_3 и k_4.

При выводе этих зависимостей полагалось, что сила f_{2x} и момент m_2 на уровне поверхности грунта известны. Если это действительно так, то прогиб u_2 и поворот θ_2 сваи на уровне поверхности грунта могут быть определены по формулам, полученным в параграфе 5.5, а затем использованы непосредственно для нахождения коэффициентов жесткости эквивалентной сваи. Чаще, однако, внутренние усилия в свае на уровне поверхности грунта наперед неизвестны и должны быть определены одновременно

с жесткостными характеристиками из расчета верхнего строения и реального свайного фундамента.

Покажем процедуры расчета сначала для случая, когда усилия f_{2x} и m_2 заданы, а затем когда они наперед неизвестны.

Пример 5.6–1. Для сваи и нагрузки, рассмотренных в примере 5.5–1, определим коэффициенты жесткости на горизонтальные смещения и поворот, соответствующие эквивалентной свае в виде колонны с защемленным нижним концом.

Из примера 5.5–1 $f_{2x} = 0{,}67$ МН, $m_2 = 2{,}70$ МН · м и $u_2 = 0{,}20$ м, $\theta_2 = 0{,}0128$ рад. Подставив это в выражение (5.57), получим $l = 20{,}15$ м, а по формулам (5.54) и (5.58) найдем $k_1 = 9{,}28$ МН/м, $k_3 = 1{,}352 \cdot 10^4$ (МН · м)/рад, $k_4 = 3{,}06 \cdot 10^2$ МН/рад.

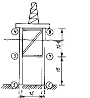


Рис. 5.13. К примеру 5.6–2.

Пример 5.6–2. Рассмотрим стальную опорную конструкцию сооружения морского шельфа (рис. 5.13) при нагрузках, определенных в примере 4.2–1, и определим жесткостные характеристики эквивалентной сваи. Действительные сваи имеют внешний диаметр 1,22 м и стенку толщиной 25 мм и заглублены в грунт на 60 м. Предполагается, что грунт представлен мягкопластичной глиной с удельным сцеплением, увеличивающимся линейно с увеличением глубины. Коэффициент пропорциональности, характеризующий изменение удельного сцепления грунта, равен 1,37 кПа/м. Значения узловых нагрузок приведены в табл. 5.1.

Коэффициент жесткости при перемещении головы эквивалентной сваи вдоль ее оси определяется с использованием способа, показанного в параграфе 5.4. Было получено (см. пример 5.4–1), что $k_2 = 688$ МН/м.

Чтобы определить коэффициенты жесткости эквивалентной сваи при горизонтальном перемещении и поворот ее головы, применим способ последовательных приближений. Сначала зададимся значениями внутренних усилий в верхнем сечении каждой сваи и определим коэффициенты жесткости по перемещениям действительных свай, как это было сделано в предыдущем примере. Эти коэффициенты жесткости включаются в общую матрицу жесткости сооружения, и затем при нагрузках, указанных в табл. 5.1, вычисляются перемещения узлов *2* и *6*. С помощью матричного выражения (5.52) по найденным здесь перемещениям голов свай

Т а б л и ц а 5.1. **Узловые нагрузки**

Узел	F_x, кН	F_y, кН	M, кН · м
2	10,9	–81,8	29,2
3	69,9	–142,0	31,5
4	135,5	–598,4	–46,5
6	14,9	–81,8	39,2
7	55,2	–140,3	42,7
8	124,8	–740,9	–96,5

Таблица 5.2. **Значения внутренних усилий в верхних сечениях свай**

Приближение	Операция	f_{2x}, кН	m_2, МН·м	f_{6x}, кН	m_6, МН·м
	Принято	205,6	2,70	205,6	2,70
1	Вычислено	206,9	1,53	204,3	1,50
	Принято	206,9	1,53	204,3	1,50
2	Вычислено	206,0	1,48	205,2	1,48
...	...	...	...	...	...
	Принято	206,5	1,48	204,7	1,46
8	Вычислено	206,5	1,48	204,7	1,46

вычисляются внутренние усилия в верхнем сечении каждой сваи. Эти значения внутренних усилий используются в следующем приближении для определения новых значений коэффициентов жесткости, и этот процесс продолжается до тех пор, пока вычисленные значения внутренних усилий не совпадут с принятыми для определения коэффициентов жесткости.

В первом приближении можно принять, что суммарная горизонтальная нагрузка на раму (см. рис. 5.13) распределяется поровну между двумя сваями. Суммарная горизонтальная нагрузка в нашем случае равна 411,2 кН, следовательно можно принять, что горизонтальные внутренние усилия, действующие в верхнем сечении каждой сваи, равны по 205,6 кН.

Итак, в первом приближении принимаем, что $f_{2x} = f_{6x} = 205{,}6$ кН, а значения изгибающих моментов задаем произвольно: $m_2 = m_6 = 2{,}7$ кНм. Результаты итерационного процесса отражены в табл. 5.2.

Сопоставление принимаемых и вычисляемых значений внутренних усилий показало, что здесь достаточно восьми итераций. Соответствующие значения коэффициентов жесткости эквивалентных свай приведены ниже:

	Элемент *1 – 2*	Элемент *5 – 6*
k_1, МН/м	70,2	72,1
k_3, МН·м	388	393
k_4, МН	143	146

5.7. Фундаменты гравитационных сооружений морского шельфа

Фундаменты – опорные элементы, необходимые для распределения нагрузок от сооружения на площади, достаточной для

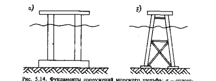


Рис. 5.14. Фундаменты сооружений морского шельфа: *а* – сплошной; *б* – в виде отдельных опорных башмаков.

предотвращения разрушения грунтового основания. В гидротехническом строительстве на морском шельфе они в первую очередь используются в конструкциях сооружений гравитационного типа, опирающихся непосредственно на грунт. Иногда такие элементы применяются и в конструкциях ферменного типа, располагаемых на очень мягких грунтах, с тем чтобы создать опирание на то время, пока через опорные колонны в грунт не будут забиты сваи, обеспечивающие устойчивость сооружения. Примеры фундаментов показаны на рис. 5.14. Они могут быть *сплошными*, т. е. устраиваемыми на всей площади под сооружением, или в виде *опорных башмаков* под отдельными опорными колоннами.

5.8. Несущая способность фундаментов

При центральном нагружении фундамента вертикальной силой возможен выпор грунта из-под подошвы фундамента (рис. 5.15). Когда зона выпора грунта охватывает обширную область основания, оно теряет устойчивость. Это состояние наступает при достижении касательными напряжениями в грунте критических значений, установленных в параграфе 5.1. Согласно общему условию потери устойчивости грунтового основания [см. формулу (5.11)] предельное давление под подошвой фундамента может быть приближенно определено по известной формуле механики грунтов

$$q_{\text{пр}} = N_c c + (1/2) N_\gamma \gamma_{\text{в}} B, \tag{5.59}$$

где c – сцепление; $\gamma_{\text{в}}$ – удельный вес грунта, определяемый с учетом взвешивающего *действия воды*; B – *характерный размер фундамента в плане*; N_c и N_γ – коэффициенты, значения которых зависят от угла внутреннего трения грунта. Для фундамента квадратной формы B принимается равным длине стороны, для прямоугольного фундамента – длине короткой стороны, для круглого фундамента – радиусу. Типичные значения коэффициентов N_c и N_γ приведены в табл. 5.3.

Как отмечалось в параграфе 5.1, для песчаных грунтов характерно $c = 0$, т. е. вместо (5.59)

$$q_{\text{пр}} = (1/2) N_\gamma \gamma_{\text{в}} B. \tag{5.60}$$

Для глинистых грунтов можно принять $\varphi = 0$, $N_c = 5{,}1$, $N_\gamma = 0$ в начальном недренированном состоянии и $c = 0$ в состоянии, отвечающем длительному дренированию, т. е. формула (5.59) упрощается до вида

$$q_{\text{пр}} = 5{,}1\ c \tag{5.61 а}$$

для недренированного состояния и

$$q_{\text{пр}} = 0{,}5 N_\gamma \gamma_{\text{в}} B \tag{5.61 б}$$

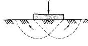


Рис. 5.15. Выпор грунта из-под центрально нагруженного фундамента.

Таблица 5.3. Значения коэффициентов N_c и N_γ

φ, град	N_c	N_γ	φ, град	N_c	N_γ
0	5,1	0	25	20,7	10,9
5	6,4	0,5	30	30,1	22,4
10	8,3	1,2	35	46,1	48,0
15	11,0	2,7	40	75,3	109,4
20	14,8	5,4	45	133,9	271,7

для дренированного состояния.

Обычно недренированное состояние характерно для завершающей стадии строительства сооружений морского шельфа, когда еще не прошло достаточно времени для снижения порового давления в результате оттока воды из грунтовой массы.

Дренированное же состояние отвечает длительной несущей способности грунтового основания, которая создается уже после отвода поровой воды.

Значение предельной несущей способности основания, установленное по формулам (5.60) или (5.61), обычно уменьшается в расчетах на коэффициент запаса, принимаемый равным от 2,5 до 3,0.

Пример 5.8–1. Рассмотрим круглый в плане фундамент радиусом 6,0 м и определим предельную несущую способность основания, представленного глинистым нормально уплотненным грунтом. Грунт имеет в недренированном состоянии прочность на сдвиг (сцепление) c, изменяющуюся линейно с увеличением глубины y ниже поверхности грунта, т. е. в соответствии с выражением $c = \alpha y$, $\alpha = 2$ кПа/м. Эффективный угол внутреннего трения глины $\varphi_д = 20°$, а объемный вес с учетом взвешивающего действия воды равен 6,2 кН/м^3.

Для начального недренированного состояния оценим сцепление, приняв значение c на глубине 3 м, т. е. равной $B/2$ в формуле (5.59). Таким образом, $c = 6$ кПа, и по выражению (5.61 а) получим $q_{пр} = 5{,}1 \cdot 6 = 30{,}6$ кПа.

Для состояния, наступающего после длительного дренирования грунта, из табл. 5.3 найдем, что $N_\gamma = 5{,}4$, и по выражению (5.61 б) получим $q_{пр} = 0{,}5 \cdot 5{,}4 \cdot 6{,}2 \cdot 6 = 104{,}4$ кПа.

Как видно, несущая способность грунтового основания возрастает в процессе консолидации грунта. В расчетах должно быть использовано меньшее значение несущей способности (соответствующее недренированному состоянию) с учетом, конечно, соответствующего коэффициента запаса.

Пример 5.8–2. Рассмотрим пример 5.8–1 при условии, что грунт представлен переуплотненной глиной, имеющей в недренированном состоянии на глубине 3 м прочность на сдвиг, равную 24 кПа.

Для начального недренированного состояния получим $q_{пр} = 5{,}1 \cdot 24 = 122{,}4$ кПа, а для состояния, отвечающего длительному дренированию, как и ранее, $q_{пр} = 104{,}4$ кПа.

Таким образом, для этого грунта длительная несущая способность оказывается меньше начальной, и это должно быть учтено в расчетах.

5.9. Сопротивление фундамента скольжению

Опасность скольжения фундамента под действием горизонтальных нагрузок возникает, если заложение фундамента относительно мало, а горизонтальные нагрузки достаточно велики. Чтобы оценить несущую способность основания $f_{пр}$ при горизонтальном нагружении (в расчете на единицу площади подошвы) для фундамента мелкого заложения, можно обратиться непосредственно к формуле Кулона (5.1). Полагая, что скольжение наступает из-за сдвига грунта в плоскости, совпадающей с поверхностью морского дна, получим

$$f_{пр} = c + (F_V/A)\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{5.62}$$

где A – площадь подошвы фундамента; F_V – вертикальная нагрузка. Если фундамент опирается на песок, то $c = 0$; в случае глинистого основания необходимо рассмотреть оба случая; $\varphi = 0$ (недренированное состояние) и $c = 0$ (дренированное состояние) и принять в расчет меньшее значение. Значение коэффициента запаса снова принимается в пределах от 2,5 до 3,0.

5.10. Расчет фундаментов на нагрузки общего вида

При центральном нагружении фундамента вертикальной силой давление, передаваемое на грунт, можно считать равномерно распределенным по подошве фундамента и использовать рекомендации, данные в § 5.8. В частности, если это давление менее допустимого значения несущей способности основания, то размеры фундамента можно считать приемлемыми, в противном случае они неприемлемы.

Однако обычно фундаменты сооружений морского шельфа подвержены действию не только вертикальных нагрузок от веса сооружения, но также горизонтальных сил и моментов от воздействия ветра и волны на верхнее строение сооружения. Горизонтальные силы вызывают в грунте под подошвой фундамента касательные напряжения, тогда как вертикальные силы и моменты приводят к неравномерности распределения давления на грунт. По условию устойчивости проектируемого фундамента значения касательных напряжений от горизонтальной нагрузки должны быть ниже несущей способности основания на сдвиг, определяемой по формуле (5.62). Для проверки достаточности несущей способности основания можно принять в запас, что максимальное по значению давление на грунт действует в виде распределенной нагрузки по всей площади подошвы фундамента. Для обеспечения устойчивости фундамента это давление должно быть ниже допускаемого значения, определяемого на основе выражений (5.60) или (5.61).

Максимальное давление на грунт, действующее по подошве фундамента, может быть оценено в предположении о линейном изменении давления вдоль фундамента (рис. 5.16, *а*). Из условий равновесия, состоящих в равенстве нулю суммы проекций сил на вертикальную ось и суммы

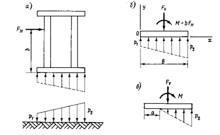


Рис. 5.16. Упрощенные схемы распределения давления по подошве фундамента, нагруженного силой и моментом.

моментов относительно левого края подошвы фундамента, следует, что

$$\int_A p dA = F_V; \ \int_A xp dA = \left(\frac{B}{2}\right) F_V + bF_H, \tag{5.63}$$

где A – площадь подошвы фундамента. Рассматривая фундамент прямоугольной формы, шириной B и длиной L и полагая давление действующим в пределах всей подошвы фундамента (рис. 5.16, *б*), легко найдем

$$p_1 = \frac{F_V}{BL} - \frac{F_H bB}{2I}; \ p_2 = \frac{F_V}{BL} + \frac{F_H bB}{2I}, \tag{5.64}$$

где $I = LB^3/12$; b – плечо горизонтальной силы.

Если минимальное значение p_1, определенное по первой из этих двух формул, не отрицательно, то максимальное значение давления p_2 может быть подсчитано непосредственно по второй формуле. При достаточно большой горизонтальной нагрузке может получиться отрицательное значение минимального давления p_1, и тогда приведенные выше решения становятся неприемлемыми, так как фундамент не может передавать на грунт растягивающие напряжения. В этом случае должно быть использовано иное решение, соответствующее распределению давления, показанному на рис. 5.16, *в*. Использовав равенства (5.63), найдем в этом случае, что

$$p_2 = \frac{4}{3L} \frac{F_V^2}{F_V B - 2bF_H}; \tag{5.65}$$

$$a = \frac{3bF_H}{F_V} - \frac{B}{2b}. \tag{5.66}$$

Концентрация давления на правом крае фундамента соответствует условию опрокидывания сооружения. Полагая в выражении (5.66) $a = B$, найдем горизонтальную нагрузку $F_H = F_V B/2b$, при которой происходит опрокидывание. Из выражения (5.65) находим в этом случае, что давление p_2 достигает бесконечно большого значения. Таким образом, если p_2 не превосходит несущей способности основания, то нет необходимости в проверке устойчивости сооружения на опрокидывание под воздействием ветра и волнения.

Формулы (5.64) – (5.66) получены для фундаментов прямоугольной или квадратной формы. Аналогичные, но более сложные выражения могут быть выведены для круглого фундамента. В приближенных расчетах круглый фундамент можно заменить равновеликим по площади подошвы квадратным фундаментом и использовать полученные для него формулы. При более сложной геометрии фундамента максимальное значение давления может быть оценено путем замены реального фундамента набором прямоугольных участков и применением к ним выражений (5.63) в предположении аналогично предыдущему о линейном распределении давления. В некоторых задачах целесообразно сохранять геометрию подошвы фундамента, но аппроксимировать распределенное по линейному закону давление (пример 5.10–2). Другим возможным способом расчета несущей способности различных по очертанию в плане и условия нагружения является использование выражения (5.59), в которое вводятся эмпирические коэффициенты, зависящие от формы подошвы фундамента и вида нагружения [34].

Пример 5–10.1. Гравитационного типа сооружение морского шельфа (рис. 5.17) имеет круглый в плане фундамент диаметром 13,5 м, установленный на песчаном основании ($\varphi = 35°$; $\gamma_в = 9{,}42$ кН/м^3). Общий вес сооружения с фундаментом с учетом взвешивающего действия воды составляет 22,5 МН. Определим, соответствует ли фундамент заданным нагрузкам и грунтовым условиям.

Сначала по первой из формул (5.64) определим минимальное давление на грунт. По площади (143,1 м^2) круглый фундамент эквивалентен квадратному со стороной, равной приблизительно 12 м. Тогда при $I = 12^4/12 = 1728$ м^4

$$p_1 = \frac{22{,}5 \cdot 10^3}{12^2} - \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 12}{2 \cdot 1728} =$$

$$= 45{,}1 \text{ кПа}.$$

Так как эта величина положительна, максимальное значение давления можно находить по второй из формул (5.64)

$$p_2 = 267{,}4 \text{ кПа}.$$

Несущую способность песчаного основания определим по выражению (5.60).

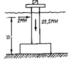


Рис. 5.17. К примеру 5.10-1.

При $\varphi = 35^\circ$ найдем из табл. 5.3, что $N_\gamma = 48$. Отсюда

$$q_{\text{пр}} = (1/2)\,48 \cdot 9{,}42 \cdot 6{,}75 = 1526\ \text{кПа}.$$

Приняв коэффициент запаса равным 2,5, получим несущую способность основания 1526/2,5 = 610 кПа. Так как это значение существенно превосходит максимальное давление, передаваемое на грунт, можно заключить, что размеры фундамента более чем достаточны с точки зрения несущей способности.

Чтобы проверить устойчивость фундамента на сдвиг, воспользуемся формулой (5.62)

$$f_{\text{пр}} = \frac{22{,}5 \cdot 10^3}{143{,}1}\ \mathrm{tg}\ 30^\circ = 90{,}8\ \text{кПа}.$$

Горизонтальная нагрузка, отнесенная к единице площади, равна $2 \cdot 10^3/143{,}1 = 14{,}0$ кПа, т. е. размеры фундамента обеспечивают устойчивость сооружения на сдвиг.

Пример 5.10–2. Рассмотрим еще раз сооружение из примера 5.10–1, полагая на этот раз, что фундамент выполнен в виде цилиндрических ячеек диаметром 4,5 м (рис. 5.18). Линейное распределение давления по подошве фундамента аппроксимируем кусочно-постоянным. Если обозначить A площадь подошвы каждой цилиндрической ячейки фундамента, то из условия равновесия (суммы проекций всех сил на вертикальную ось) получим

$$p_2 A + \frac{p_1 + p_2}{2}\, 3A + p_1 A = F_V,$$

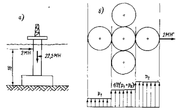


Рис. 5.18. К примеру 5.10–2: *а* – схема приложения внешних нагрузок; *б* – схема распределения напряжений под фундаментами цилиндрических ячеек.

где F_V – вертикальная нагрузка на фундамент. Аналогично, если R – радиус ячеек фундамента, то сумма моментов всех сил относительно левого края фундамента дает

$$6Rp_2 A + 4R\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) 3A + Rp_1 A = M,$$

где M – момент от всех внешних нагрузок относительно левого края фундамента. Пусть F_H – горизонтальная нагрузка, а b – ее плечо относительно подошвы фундамента, тогда

$$M = bF_H + 3RF_V.$$

Из решения двух уравнений равновесия получим

$$p_1 = \frac{2F_V}{10A} - \frac{F_H b}{4RA}; \quad p_2 = \frac{2F_V}{10A} + \frac{F_H b}{4RA}.$$

Подставив $F_V = 22{,}5$ МН, $F_H = 2{,}0$ МН, $b = 16$ м, $R = 2{,}25$ м, $A = 15{,}90$ м^2, найдем, что $p_1 = 59{,}4$, $p_2 = 506{,}6$ кПа.

Поскольку p_1 получилось положительным, обосновано и приведенное здесь решение для p_2. Рассмотрев правую ячейку фундамента, в пределах которой действует это давление, найдем для нее по формуле (5.60), что предельная несущая способность основания

$$q_{\text{пр}} = (1/2)\,48 \cdot 9{,}42 \cdot 2{,}25 = 508{,}7\ \text{кПа}.$$

Это значение чуть больше максимального давления, следовательно, рассматриваемый здесь фундамент не гарантирует устойчивость основания, поскольку не обеспечен необходимый коэффициент запаса. Одним из возможных способов обеспечения устойчивости в данном случае является прикрепление цилиндрических элементов к круглой плите радиуса 13,5 м, рассчитанной в примере 5.10–1.

5.11. Упругая реакция основания

Пока запроектированный должным образом фундамент испытывает нагрузки, не превышающие расчетные значения, грунтовое основание под подошвой фундамента работает как упругая среда. Чтобы учесть упругую реакцию основания в расчете сооружения, в расчетной схеме действительное основание можно представить упругим фундаментом, расположенным на поверхности грунтового основания, рассматриваемого как недеформируемая среда (рис. 5.19). По жесткости упругий фундамент эквивалентен действительному, опертому на упругое грунтовое основание.

Соотношение между усилиями и перемещениями эквивалентного упругого фундамента можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \tag{5.67}$$

где f_{2x}, f_{2y}, m_2 – усилия, приложенные к верху фундамента; u_2, v_2, θ_2 – соответствующие этим усилиям перемещения. Для жесткого круглого в плане фундамента, расположенного на однородном упругом грунтовом основании [11]

$$k_1 = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu};\ k_2 = \frac{4GR}{1-\nu};\ k_3 \approx \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}, \tag{5.68}$$

где R – радиус подошвы фундамента; G и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона грунтового основания. Коэффициент Пуассона для глинистых грунтов может быть принят равным 0,5, а для песчаных грунтов – 0,25. Значение модуля сдвига грунта может быть установлено по лабораторным испытаниям образцов грунта, взятых на месте установки сооружения. Поскольку модуль сдвига изменяется в широких пределах, расчетное его значение принимается равным осредненному по глубине порядка двух-трех диаметров фундамента.

Хотя формулы (5.68) выведены для круглого в плане фундамента, они могут быть использованы для приближенного расчета равновеликих по площади квадратных фундаментов.

Пример 5.11–1. Определим горизонтальное перемещение верхнего строения сооружения морского шельфа, показанного на рис. 2.50, от горизонтальной нагрузки F, равной 450 кН. Опорная колонна имеет высоту $l = 24{,}5$ м, поперечное сечение с моментом инерции $I = 15{,}2$ м^4 и выполнена из железобетона с модулем упругости $E = 28$ ГПа. Фундамент сооружения имеет в плане форму круга радиусом $R = 6{,}75$ м. Модуль сдвига G грунтового основания равен 50 МПа.

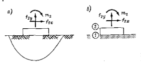


Рис. 5.19. Замена жесткого фундамента на упругом основании (*а*) эквивалентным по жесткости упругим фундаментом на недеформируемом основании (*б*).

Примем вертикальные перемещения сооружения равными нулю. Тогда с помощью прямого метода жесткости, описанного в главе 2 (см. пример 2.4–3), и с использованием матричного выражения (5.67) получим следующее соотношение между нагрузками и перемещениями:

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+k_1) & b & -a & b \\ b & (2c+k_3) & -b & c \\ -a & -b & a & -b \\ b & c & -b & 2c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

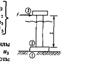


Рис. 5.20. К примеру 5.11–1.

Здесь F_{2x}, M_2, F_{3x} и M_3 – горизонтальные силы и моменты, приложенные к узлам *2* и *3*; u_2, θ_2, u_3 и θ_3 – горизонтальные перемещения и повороты узлов;

$$a = 12EI/l^3;\ b = 6EI/l^2;\ c = 2EI/l;$$

k_1 и k_3 – составляющие матрицы жесткости в выражении (5.68). Граничные условия: $F_{2x} = M_2 = M_3 = 0$; $F_{3x} = 450$ кН.

Подставив численные значения величин и решив матричное уравнение, получим $u_2 = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$ м; $\theta_2 = 0{,}13 \cdot 10^{-3}$ рад; $u_3 = 8{,}6 \cdot 10^{-3}$ м; $\theta_3 = 0{,}45 \cdot 10^{-3}$ рад.

Горизонтальное перемещение верхнего строения, равное $8{,}6 \cdot 10^{-3}$ м, можно сопоставить со значением $5{,}1 \cdot 10^{-3}$ м, полученным в предположении, что сам фундамент и грунтовое основание под ним абсолютно жесткие.

Пример 5.11–2. Построим матрицу жесткости фундамента колонны, показанной на рис. 5.21, *а*, состоящего из пяти цилиндрических ячеек радиусом R.

Представим реакцию основания эквивалентной реакцией упругих пружин, имеющих жесткости k_1 и k_2 (рис. 5.21, *б*), значения которых находятся по формулам (5.68). Соотношение между горизонтальным усилием f_{2x} и перемещением u_2 узла *2* получает в этом случае вид $f_{2x} = 5k_1u_2$.

Аналогично, соотношение между вертикальной силой f_{2y} и перемещением v_2 можно записать как $f_{2y} = 5k_2v_2$.

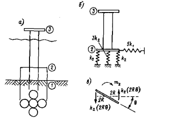


Рис. 5.21. К примеру 5.11–2.

Наконец по условию равновесия фундамента (рис. 5.21, *в*) можно найти соотношение между моментом и поворотом фундамента $m_2 = 4Rk_2\theta_2$.

Таким образом, матричное соотношение между усилиями, приложенными к фундаменту, и его перемещениями можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 5k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4Rk_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

Как и в предыдущем примере, полученная здесь матрица жесткости фундамента может быть использована для расчета сооружения на внешние воздействия.

5.12. Осадка фундамента

Фундаменты сооружений морского шельфа получают осадки вследствие уплотнения грунта под воздействием веса сооружения. Равномерная осадка фундамента обычно не причиняет вреда фундаменту или расположенному на нем сооружению, но неравномерная осадка может вызвать недопустимые напряжения в фундаменте или в сооружении. Неравномерные осадки, которые могут быть допущены, конечно, различны для разных сооружений и оснований. Однако, как правило, относительная осадка более 25 мм считается недопустимой.

Если фундамент круглой и квадратной формы в плане расположен на относительно мощном слое песка (толщина слоя не менее трех-четырех диаметров или длин сторон фундамента), то максимальная осадка обычно невелика и может быть оценена с использованием решений, полученных в предыдущем параграфе. Так, если ΔH означает осадку, то из выражения (5.67) при $\nu = 0{,}25$ получим

$$\Delta H = W/k_2 = 3W/16GR, \tag{5.69}$$

где R – радиус круглого в плане фундамента или полуширина квадратного фундамента; W – вертикальная нагрузка; G – модуль сдвига песка. Значение, получаемое по этой формуле, дает максимум ожидаемой равномерной осадки. Если фундамент состоит из нескольких блоков, несущих различные нагрузки, относительная осадка может быть оценена как разность осадок, получаемых по формуле (5.69), применяемой к каждому фундаментному блоку в отдельности. Для сплошного фундамента значение относительной осадки может быть оценено в предположении, что по формуле (5.69) получается средняя осадка, а максимальная осадка в центре фундамента вдвое больше осадок по краям фундамента. В этом случае осадка в центре фундамента оказывается на одну треть больше средней осадки, а осадка по краю фундамента на треть меньше. Относительная осадка, таким образом, равна двум третям от значения средней осадки.

Для фундаментов, расположенных на относительно мощном слое глины, расчет осадок более сложен, поскольку необходимо учесть как начальное деформированное *состояние глины, так и длительный процесс ее фильтрационного* уплотнения. Как отмечалось в параграфе 5.1, в песчаных грунтах отжатие поровой воды под влиянием сжимающих нагрузок происходит очень быстро, поэтому в данном случае указанные проблемы не возникают при расчете осадок фундамента. В глинистых грунтах при расчете осадок фундамента имеет существенное значение явление консолидации.

Осадки фундаментов на глинистых основаниях обычно определяются на основе компрессионных кривых, полученных для образцов грунта. Компрессионные испытания (исследования консолидации) проводятся в лабораториях при выдерживании грунта на каждой ступени нагружения до полного завершения деформаций.

На рис. 5.22 показаны результаты таких исследований, проведенных на образцах, взятых из слоев нормально уплотненной и переуплотненной глин (см. параграф 5.1). Обычно график зависимости деформации от десятичного логарифма напряжения аппроксимируется прямой или ломаной (из двух участков) линией. Значение σ_0 на графиках означает то напряжение, которому был подвержен испытуемый грунт под воздействием веса расположенных выше слоев грунта (оно равно удельному весу грунта с учетом взвешивающего действия воды, умноженному на глубину, на которой был отобран образец грунта). Для нормально уплотненного грунта это напряжение является максимальным из тех, которым грунт когда бы то ни было подвергался на той глубине, где был взят образец. В истории нагружения переуплотненного грунта было такое его состояние, когда он испытывал напряжение σ_m, большее, чем σ_0, и это проявлялось при компрессионных испытаниях в виде излома на диаграмме деформации в точке, соответствующей напряжению σ_m.

Поскольку полагается, что образец грунта характеризует свойства грунта на любой глубине, то деформация ϵ связана с напряжением σ (равным σ_0 для данной глубины плюс приложенное напряжение $\Delta\sigma$) в случае нормально уплотненного глинистого грунта зависимостью

$$\epsilon = C_c(\lg \sigma - \lg \sigma_0), \tag{5.70}$$

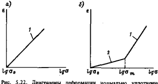


Рис. 5.22. Диаграммы деформации нормально уплотненной (*а*) и переуплотненной (*б*) глины.

1 – уклон C_c; *2* – уклон C_r.

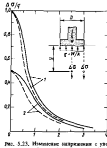


Рис. 5.23. Изменение напряжения с увеличением глубины (по Буссинеску) под центром (*1*) и под краем (*2*) центрально нагруженного фундамента.

——— квадратная в плане форма фундамента; – – – круглая форма.

где C_c характеризует наклон прямой на графике (см. рис. 5.22, *а*). Аналогично для переуплотненной глины при $\sigma \leqslant \sigma_m$

$$\epsilon = C_r(\lg\sigma - \lg\sigma_0), \qquad (5.71\ \text{а})$$

и при $\sigma > \sigma_m$

$$\epsilon = C_r(\lg\sigma_m - \lg\sigma_0) + C_c(\lg\sigma - \lg\sigma_m), \qquad (5.71\ \text{б})$$

где C_r и C_c характеризуют наклоны участков графика на рис. 5.22, *б*.

Заметим, что напряжение σ_m может изменяться с увеличением глубины, и для выяснения характера этого изменения компрессионные испытания должны быть проведены для образцов, извлеченных с разных глубин.

Для определения напряжения $\Delta\sigma$ в грунте от вертикальной нагрузки W, приложенной к круглому или квадратному фундаменту диаметром или шириной D, обычно применяется теоретическое решение Буссинеска, *т. е. грунт рассматривается как однородная упругая среда*. График на рис. 5.23 дает представление о характере изменения напряжений с увеличением глубины под центром и краем фундамента, имеющего подошву круглой или квадратной формы площадью A. Значения напряжений на графике приведены в долях от средней интенсивности давления $q = W/A$, передаваемого фундаментом на поверхность основания. Значения глубины там отнесены к диаметру или ширине фундамента.

Модель упругой однородной среды может быть использована и для определения осадок в центре или на краю фундамента. Относительная осадка

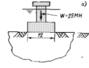


Рис. 5.24. Расчетная схема сооружения.

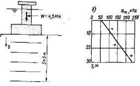


Рис. 5.25. Расчетная схема сооружения и характеристика грунтовых условий.

Таблица 5.4. **Напряжения и деформации в грунтовом массиве под фундаментом**

Глубина y, м	Напряжения, кПа				Деформация ϵ
	σ_0	$\Delta\sigma$	σ	σ_m	
		Под центром фундамента			
3	18,9	36,0	54,9	78,0	$9{,}26\cdot10^{-3}$
9	56,7	16,8	73,5	114,0	$2{,}25\cdot10^{-3}$
15	94,5	9,0	103,5	150,0	$0{,}79\cdot10^{-3}$
21	132,3	5,2	137,5	186,0	$0{,}33\cdot10^{-3}$
27	170,1	3,2	173,3	222,0	$0{,}16\cdot10^{-3}$
		Под краем фундамента			
3	18,9	18,0	36,9	78,0	$5{,}81\cdot10^{-3}$
9	56,7	10,4	67,1	114,0	$1{,}46\cdot10^{-3}$
15	94,5	5,8	100,3	150,0	$0{,}51\cdot10^{-3}$
21	132,3	4,0	136,3	186,0	$0{,}26\cdot10^{-3}$
27	170,1	2,4	172,5	222,0	$0{,}12\cdot10^{-3}$

нескольких отдельных фундаментов может быть найдена как разность средних осадок этих фундаментов. Для сплошного фундамента *относительная осадка получается как разность осадок в центре и на краю.*

Пример 5.12–1. Определим осадку круглого фундамента, показанного на рис. 5.24. Грунтовое основание сложено песками с модулем сдвига $G = 50$ МПа. Вес сооружения и фундамента W с учетом взвешивающего действия воды равен 25 МН. Диаметр подошвы фундамента 12 м.

По формуле (5.69) определим среднюю осадку фундамента: $\Delta H = (3\cdot25)/(16\cdot50\cdot6) = 0{,}0156$ м.

Относительная осадка оценивается как $0{,}67\cdot0{,}0156 = 0{,}0105$ м.

Пример 5.12–2. Определим максимальное значение относительной осадки фундамента, показанного на рис. 5.25, *а*. Основание под фундаментом сложено слоями переуплотненной глины с параметрами $C_r = 0{,}02$; $C_c = 0{,}18$ и σ_m (в килопаскалях), изменяющимися с увеличением глубины по закону $\sigma_m = 60 + 6y$ (рис. 5.25, *б*). Удельный вес глины с учетом взвешивающего действия воды равен 6,3 кН/м^3. Вес сооружения и фундамента с учетом взвешивающего действия воды равен 4,5 МН. Диаметр подошвы фундамента 12 м.

Для определения осадки используем выражения (5.71). Выделим в грунтовом массиве под фундаментом пять горизонтальных слоев толщиной по 6 м. Определим в каждом слое посередине его толщины напряжения $\sigma_0 = \gamma_{\text{гр}}y$, а по графику на рис. 5.23 напряжения $\Delta\sigma$ от нагрузки, передаваемой на грунт фундаментом при $q = W/A = 4500/113 \approx 40$ кПа. Деформации, соответствующие вычисленным напряжениям, определим по выражениям (5.71). Результаты вычислений приведены в табл. 5.4.

Осадка фундамента ΔH подсчитывается по деформациям:

$$\Delta H = \int_0^\infty \epsilon\, dy = H\Sigma\epsilon_i,$$

где H – толщина слоя; ϵ_i – деформация i-го слоя. Суммированием деформаций, приведенных в таблице, получим их значения под центром и по краю фундамента, равные соответственно $12{,}79 \cdot 10^{-3}$ и $8{,}16 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, осадка основания под центром фундамента равна $6 \cdot 12{,}79 \cdot 10^{-3} = 76{,}7 \cdot 10^{-3}$ м, а под краем фундамента – $6 \cdot 8{,}16 \cdot 10^{-3} = 49{,}0 \cdot 10^{-3}$ м. Соответственно максимальное значение относительной осадки равно $(76{,}7 - 49{,}0)\, 10^{-3} = 27{,}7 \cdot 10^{-3}$ м.

Задачи

1. Глинистый грунт имеет в недренированном состоянии прочность на сдвиг (сцепление) c, изменяющееся по глубине y так, как показано на рис. 5.26. При этом $c_0 = 21{,}5$ кПа, $b = 1{,}41$ кН/м³. Определить заглубление L стальной сваи внешним диаметром 1,82 м и толщиной стенки 50 мм, необходимое при осевой сжимающей нагрузке на сваю, равной 13,5 МН. Коэффициент запаса принять равным 1,5. Удельные веса с учетом взвешивающего действия воды у грунта 5,5 кН/м³, у стали 66 кН/м³.

Ответ: $L = 83$ м.

2. Песчаный грунт имеет удельный вес с учетом взвешивающего действия воды, равный 7,8 кН/м³. Определить заглубление L стальной сваи внешним диаметром 1,22 м и толщиной стенки 20 мм при сжимающей осевой нагрузке, равной 9 МН. Использовать значения параметров грунта, определяющих несущую способность сваи [25, 34] и принять удельный вес стали в воде равным 66 кН/м³, а коэффициент запаса – 1,5.

Ответ: $L = 26$ м.

3. Опорное основание сооружения, одна из сторон которого изображена на рис. 5.27, включает опорные колонны, закрепленные в грунте сваями, и окаймляющие сваи, размещенные через 15 м. Определить вертикальную нагрузку на отдельные сваи, полагая, что усилия распределены в пределах фундамента по линейному закону.

Ответ: $P_1 = -6$; $P_2 = 2$; $P_3 = 10$; $P_4 = 18$ МН.

4. Решить задачу 3 при условии отсутствия окаймляющих свай.

Ответ: $P_1 = -1{,}33$; $P_2 = 25{,}33$ МН.

5. Определить продольную жесткость стальной сваи диаметром 1,82 м, толщиной стенки 25 мм, забитой в мягкую глину на глубину 75 м.

Ответ: $k_0 = 816$ МН/м.

6. Для стальной сваи диаметром 0,62 м, толщиной стенки 12,5 мм, забитой в мягкую глину на глубину 60 м, определить протяженность L_1 зоны пластических деформаций грунта, горизонтальное перемещение u и поворот θ на уровне поверхности грунта от горизонтальной нагрузки $F = 6{,}85$ кН, приложенной к опорной колонне

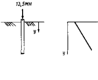


Рис. 5.26. К задаче 1.

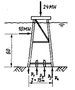


Рис. 5.27. К задаче 3.

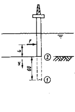


Рис. 5.28. К задаче 6.

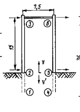


Рис. 5.29. К задаче 9.

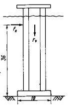


Рис. 5.30. К задаче 10.

(рис. 5.28) на уровне 5,25 м над морским дном, при условии, что прочность глины на сдвиг (сцепление) изменяется с увеличением глубины по закону $c = by$, где $b = 1{,}37$ кН/м³.

Ответ: $L_1 = 39$ м; $u = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$ м; $\theta = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ рад.

7. При условиях, указанных в задаче 6, определить максимальный момент в свае, глубину, на которой он возникает, и напряжения от изгиба.

Ответ: $L_1 = 46{,}2$ кН · м; $y = 2{,}1$ м; $\sigma_к = 13{,}2$ МПа.

8. При условиях, указанных в задаче 6, определить жесткостные характеристики эквивалентной сваи.

Ответ: $k_1 = 36$ кН/м; $k_2 =$ 34,4 кН/м; $k_3 = 220$ кНм/рад; $k_4 = 77$ кНм/м.

9. Несложное по конструкции сооружение (рис. 5.29) в виде стальной рамы включает вертикальные сваи диаметром 1,22 м, толщиной стенки 25 мм, погруженные в мягкую глину на глубину до 60 м, и горизонтальную связь на высоте 15 м над поверхностью морского дна в виде стальной трубы диаметром 1,22 м и толщиной стенки 12,5 мм. Прочность глины на сдвиг (сцепление) изменяется по глубине по закону $c = by'$, где $b = 0{,}78$ кН/м³. Внешние узловые нагрузки: $F_{2X} = F_{5X} = 22{,}5$ кН; $F_{3X} = F_{6X} = 135$ кН. Определить жесткостные характеристики эквивалентных свай *1–2* и *4–5*.

10. Определить начальную и долговременную несущую способность основания под фундаментом квадратной формы на рис. 5.30, полагая, что глинистый грунт имеет следующие характеристики: $c = 48$ кПа; $\varphi_д = 20°$; $\gamma_в = 6{,}3$ кН/м³. Коэффициент запаса принять равным 2,5.

11. Определить несущую способность основания, полагая во изменение условий задачи 10, что фундамент опирается на песок с характеристиками $\varphi = 30°$, $\gamma_в = 9{,}4$ кН/м³.

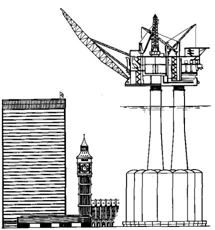
Ответ: 0,77 МПа.

12. Для сооружения, рассмотренного в задаче 10, определить максимальное и минимальное значения нагрузки F_V, соответствующие несущей способности основания, установленной в задаче 11, полагая, что горизонтальная нагрузка $F_H = 2{,}25$ МН.

Ответ: 230 МН; 9,3 МН.

13. По характеристикам грунтового основания, заданным в примере 5.12–2, оценить максимальное значение относительной осадки круглого фундамента диаметром 18 м под вертикальной нагрузкой 10 МН.

Ответ: 32 мм.



Стационарная буровая платформа Хондо компании Эксон, установленная на глубине 259 м в проливе Санта-Барбара (Калифорния).

6. ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ МОРСКОГО ШЕЛЬФА

Под влиянием периодического волнового воздействия сооружение континентального шельфа совершает периодические перемещения той же частоты, что и частота волновой нагрузки. Вызванные ими переменные по направлению ускорения создают в сооружении инерционные силы. Эффект этих сил обычно проявляется в виде увеличения перемещений, связанных с волновым воздействием. Упрощенный способ учета инерционных сил был показан в главе 4. Если собственная частота колебаний сооружения значительно выше частоты волновой нагрузки, то, как показывают расчеты, увеличение перемещений вследствие динамического характера нагрузки несущественно. Это характерно для относительно невысоких и жестких сооружений континентального шельфа, используемых на глубинах 90 м и менее. Расчеты сооружения при таких условиях могут быть выполнены при статической постановке задачи (см. главу 4).

*У высоких сооружений или сооружений, имеющих значительную гиб*кость, вследствие каких-либо особенностей их формы, собственная частота колебаний может оказаться близкой по значению к частоте волновой нагрузки, и это проявится в виде заметного увеличения перемещений сооружения по сравнению с полученными от статически приложенных нагрузок. В этих условиях сооружение, рассчитанное в статической постановке задачи, должно быть подвергнуто проверке на случай возможного увеличения напряжений, вызванного динамическим характером внешних воздействий. Настоящая глава посвящена описанию основ метода динамического расчета. Этот же метод применяется и при необходимости расчета сооружения на нагрузки, связанные с землетрясениями, если оно устанав*ливается в сейсмически активном районе. Краткое изложение этого* вопроса также содержится в данной главе.

6.1. Приведение волнового воздействия к узловым нагрузкам

При изложении в главе 4 статического метода расчета сооружений континентального шельфа рассматривались узловые нагрузки, обусловленные волновыми воздействиями и соответствующие тому моменту, при котором общая горизонтальная составляющая волнового *воздействия достигает максимального значения. Такое предположение* оправдано, когда инерционные силы пренебрежимо малы и общая реакция сооружения изменяется пропорционально действующей волновой нагрузке. В этом случае максимальная реакция сооружения соответствует по времени моменту достижения максимума равнодействующей волновой нагрузки. Однако, это соответствие нарушается, когда эффект динамического характера воздействий становится существенным, поскольку масса сооружения не может немедленно отреагировать на приложенную нагрузку. Поэтому при выполнении динамических расчетов сооружения узловые нагрузки должны рассматриваться во все моменты волнового воздействия, а не только для тех моментов, когда волновое воздействие достигает максимума.

Из-за усложнения расчетов в этих случаях приходится прибегать к более приближенному представлению волновых нагрузок, чем при выполнении статических расчетов. В этом представлении фактические площади и объемы отдельных элементов приводятся к узловым, после чего горизонтальные волновые нагрузки подсчитываются для тел, сосредоточенных в узлах и имеющих приведенные площади и объемы. Кроме того в целях упрощения расчета при определении волновых нагрузок обычно применяется линейная теория волн (Эри).

Рассмотрим для примера сооружение, показанное на рис. 6.1, *а*. Для подсчета узловых нагрузок от волнового воздействия на сооружение приведем фактические площади и объемы отдельных цилиндрических элементов к узловым площадям A_1, A_2, … и объемам V_1, V_2, … (рис. 6.1, *б*). Фактические площади и объемы отдельных элементов подсчитываются по значениям внешних диаметров и проекций длин элементов на нормаль к направлению распространения волн, при этом рассматриваются только те элементы или их отрезки, которые находятся ниже уровня спокойной воды. Так, приведенная к узлу *2* площадь A_2 включает половины фактических площадей элементов *1–2*, *2–3*, *2–5* и *2–7* на боковой стороне сооружения, изображенной на рисунке, и аналогичные вклады на фронтальной (по отношению к волне) стороне от элементов, примыкающих к узлу *2*. Аналогичная операция производится с объемами элементов (при этом учитываются их наружные диаметры и длина проекции). В результате

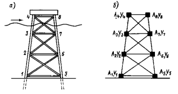


Рис. 6.1. Опорное основание буровой платформы (*а*) и его схема с приведенными к узлам площадями и объемами элементов (*б*).

находится приведенный объем V_2. Заметим, что горизонтальный элемент *2–6* создает нулевой вклад в приведенные площади и объемы, поскольку его проекция на нормаль к направлению движения волны пренебрежимо мала. Это вполне согласуется с более точным представлением волновых нагрузок, которое было изложено ранее.

По найденным таким образом, приведенным к узлам площадям и объемам элементов с помощью формулы Морисона (учитывающей эффект относительного движения) можно определить волновую нагрузку F_i, приложенную к i-му узлу

$$F_i = 0{,}5\rho C_{\text{ск}} A_i \, |v'_{xi}| \, v'_{xi} + \rho C_{\text{ин}} V_i a_{ix} - \rho \, (C_{\text{ин}} - 1) \, V_i \ddot{u}_i , \tag{6.1}$$

где v'_{xi} – горизонтальная составляющая скорости движения воды относительно i-го узла, равная разности горизонтальных составляющих скоростей воды v_{xi} и узла $\dot{u}_i$, т. е.

$$v'_{xi} = v_{xi} - \dot{u}_i ; \tag{6.2}$$

a_{ix} – горизонтальная составляющая ускорения воды; $\ddot{u}_i$ – ускорение движения узла; ρ – плотность воды; $C_{\text{ск}}$ и $C_{\text{ин}}$ – коэффициенты скоростного и инерционного сопротивлений.

Полагая в дальнейшем скорость смещения узла сооружения малой в сравнении со скоростью движения воды, получим приближенно, что $|v'_{xi}| \, v'_{xi} = |v_{xi}| \, v_{xi} - 2 \, |v_{xi}| \, \dot{u}_i$.

В качестве дополнительного допущения заменим $|v_{xi}|$ соответствующим средним значением v_{xi}, независимым от времени. Тогда выражение для угловой нагрузки от волнового воздействия получит вид

$$F_i = 0{,}5 C_{\text{ск}} \, A_i \, \hat{v}_{xi} \, v_{xi} + \rho C_{\text{ин}} V_i \, a_{ix} - \rho C_{\text{ск}} A_i \, \hat{v}_{xi} \, \dot{u}_i - $$
$$- \rho C_{\text{ск}} A_i \, \hat{v}_{xi} \, \dot{u}_i - \rho \, (C_{\text{ин}} - 1) \, V_i \, \ddot{u}_i . \tag{6.3}$$

По теории волн Эри для волны, имеющей высоту H, круговую частоту ω и волновое число k, а также при глубине воды, равной h, получим следующие выражения горизонтальной проекции скорости и ускорения в районе узла i:

$$v_{xi} = E_i \cos \, (kx_i - \omega t) ; \tag{6.4}$$

$$a_{ix} = \omega E_i \sin \, (kx_i - \omega t) , \tag{6.5}$$

где

$$E_i = \frac{\omega H}{2} \, \frac{\operatorname{ch} ky_i}{\operatorname{sh} kh} , \tag{6.6}$$

а x_i и y_i – координаты x и y узла i, причем начало координат находится на уровне морского дна. Отметим, что для нахождения приведенных нагрузок в узлах с координатами $y > h$ при вычислении волнового воздействия на погруженные части элементов можно приближенно полагать в полученных выше формулах $y = h$. Подставив последние выражения в формулу для узловой нагрузки, получим

$$F_i = F_{0i} \sin(kx_i - \omega t + \varphi_i) - \rho C_{ск} A_i \hat{v}_{xi} \dot{u}_i - $$

$$- \rho (C_{ин} - 1) V_i \ddot{u}_i, \tag{6.7}$$

где

$$F_{0i} = E_i [(0{,}5 \rho C_{ск} A_i \hat{v}_{xi})^2 + (\rho C_{ин} V_i \omega)^2]^{1/2}; \tag{6.8}$$

$$\mathrm{tg}\, \varphi_i = \frac{C_{ск} A_i \hat{v}_{xi}}{2 C_{ин} V_i \omega}, 0 \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{6.9}$$

Остается определить приближенное значение $\hat{v}_{xi}$. Для регулярных волн Эри значение $\hat{v}_{xi}$ назначается так, чтобы разница между $|v_{xi}| v_{xi}$ и $\hat{v}_{xi} v_{xi}$ была минимизирована в смысле наименьших квадратов, т. е. при минимуме интеграла

$$J = \int_0^{2\pi} (|v_{xi}| v_{xi} - \hat{v}_{xi} v_{xi})^2 \, d\omega t. \tag{6.10}$$

Использовав выражение (6.4), получим

$$\hat{v}_{xi} = \frac{8}{3\pi} E_i = 0{,}849 E_i. \tag{6.11}$$

Пример 6.1–1. Определим выражение волновой нагрузки на узел *2* сооружения (рис. 6.2) при условии, что волна имеет высоту 6 м и длину 90 м. Глубина воды в месте расположения буровой платформы равна 22,5 м. Вертикальные элементы опорного основания имеют внешний диаметр 1,20 м, а горизонтальные и наклонные 0,6 м. Все четыре стороны опорного основания одинаковые. Приведенная к узлу *2* площадь A_2 складывается из площадей отдельных элементов, *присоединенных к этому узлу.*

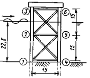


Рис. 6.2. К примеру 6.1–1.

Для элементов *1–2* и *2–3* площади, подверженные действию волн, равны (часть площади элемента *2–3*, находящаяся выше уровня воды, не учитывается) $A_{1-2} = 1{,}2 \cdot 15 = 18$ м²; $A_{2-3} = 1{,}2 \cdot 7{,}5 = 9$ м².

Для наклонного элемента *2–4*, который можно представить как эквивалентный ему вертикальный цилиндр высотой 15 м, получим $A_{2-4} = 0{,}6 \cdot 15 = 9{,}0$ м².

Для горизонтального элемента *2–5* получим $A_{2-5} = 0$, так как длина проекции этого элемента на нормаль к направлению движения волны равна нулю.

Для наклонного элемента *2–6*, который можно принять эквивалентным вертикальному элементу высотой 7,5 м, получим $A_{2-6} = 0{,}6 \cdot 7{,}5 = 4{,}5$ м².

Для нижнего наклонного элемента на фронтальной стороне, присоединенного к узлу *2* и обозначаемого, например, как *2–7*, площадь равна $A_{2-7} = 0{,}6 \cdot 21{,}2 = 12{,}7$ м².

Для горизонтального элемента на фронтальной стороне, обозначенного, скажем, как *2–8*, получим $A_{2-8} = 0{,}6 \cdot 15 = 9{,}0$ м².

И, наконец, для верхнего наклонного элемента на фронтальной стороне, также присоединенного к узлу *2* и обозначаемого, допустим, как *2–9*, найдем $A_{2-9} = 0{,}6 \cdot 10{,}6 = 6{,}4$ м².

Сложив половины от всех полученных выше площадей, найдем, что $A_2 = 34{,}2$ м².

Аналогичным образом определяется приведенный к узлу *2* объем V_2. Сначала найдем фактические объемы элементов как преград на пути движения волны:

$$V_{1-2} = 1/4 \; 15\pi \cdot 1{,}2^2 = 16{,}96 \text{ м}^3;$$

$$V_{2-3} = 1/4 \cdot 7{,}5\pi \cdot 1{,}2^2 = 8{,}48 \text{ м}^3;$$

$$V_{2-4} = 1/4 \cdot 15\pi \cdot 0{,}6^2 = 4{,}24 \text{ м}^3;$$

$$V_{2-5} = 0;$$

$$V_{2-6} = 1/4 \cdot 7{,}5\pi \cdot 0{,}6^2 = 4{,}24 \text{ м}^3;$$

$$V_{2-7} = 1/4 \cdot 21{,}2\pi \cdot 0{,}6^2 = 6{,}00 \text{ м}^3;$$

$$V_{2-8} = 1/4 \cdot 15\pi \cdot 0{,}6^2 = 4{,}24 \text{ м}^3;$$

$$V_{2-9} = 1/4 \cdot 10{,}6\pi \cdot 0{,}6^2 = 3{,}00 \text{ м}^3.$$

Сложив половины полученных объемов, найдем $V_2 = 22{,}5$ м³.

Для волны Эри, имеющей длину 90 м, при глубине воды 22,5 м характерны следующие значения волнового числа и круговой частоты: $k = 0{,}0687$ 1/м; $\omega = 0{,}786$ 1/с.

Нагрузку F_2 определим по выражению (6.7). Для этого по (6.6) при $y_2 = 15$ м найдем амплитуду скорости движения воды $E_2 = 1{,}67$ м/с.

По формуле (6.11) вычислим $\hat{v}_{xi} = 1{,}42$ м/с.

Амплитуду F_{02} волновой нагрузки, действующей на узел *2*, и угол сдвига фазы φ_2 определим по выражениям (6.8) и (6.9), принимая $\rho = 10^3$ кг/м³, $C_{ск} = 1$ и $C_{ин} = 2$:

$F_{02} = 71{,}65$ кН; $\varphi_2 = 0{,}601$ рад $= 34{,}4°$.

Если начало координат выбрать так, чтобы $x_2 = 0$, то выражение волновой нагрузки (в килоньютонах) на узел *2* получает следующий вид:

$$F_2 = 71{,}65 \sin(-\omega t + 0{,}601) - 48{,}56 \dot{u}_2 - 22{,}5 \ddot{u}_2 ,$$

где $\dot{u}$ и $\ddot{u}$ выражаются в метрах на секунду и в метрах на секунду в квадрате соответственно, а $\omega = 0{,}786\ с^{-1}$, как определено выше.

6.2. Уравнения динамики

В качестве иллюстрации при выводе уравнений движения сооружения морского шельфа под воздействием динамических нагрузок рассмотрим рамную систему, являющуюся боковой стороной сравнительно простого по конструкции опорного основания буровой платформы (рис. 6.3). Волновые усилия, действующие на каждый узел рамы, считаются направленными горизонтально. Они определяются по формуле (6.7) с учетом вклада от элементов фронтальной стороны, примыкающих к рассматриваемому узлу. Можно полагать, что при таких нагрузках рама совершает движение в основном в горизонтальном направлении. Рассматривая перемещения системы на уровнях *2–6*, *3–7* и *4–8*, заметим, что вследствие сравнительно большой жесткости горизонтальных связей каждый пояс будет перемещаться как твердое целое, т. е. горизонтальные перемещения узлов в пределах одного пояса практически одинаковы.

Для определения движения твердого тела важнее знать равнодействующую горизонтальных нагрузок, чем их распределение по телу. Таким образом, для описания движения каждого пояса системы, рассматриваемого как твердое целое, достаточно знать только сумму волновых нагрузок, действующих на все узлы этого пояса. Обозначим $\widetilde{F}_i$ суммарную волновую нагрузку, действующую на пояс *i–j*; например, $\widetilde{F}_2$ представляет собой сумму сил, действующих на узлы *2* и *6*.

Из выражения (6.7) получим при $u_i = u_j$:

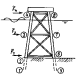


Рис. 6.3. Боковая сторона опорного основания с волновыми нагрузками, действующими на подвижные пояса.

$$\widetilde{F}_i = F_{0i} \sin(kx_i - \omega t + \varphi_i) + F_{0j} \sin(kx_i + kL_i - \omega t + \varphi_j) - \rho C_{ск} \hat{v}_{xi} \widetilde{A}_i \dot{u}_i - \rho (C_{ин} - 1) \widetilde{V}_i \ddot{u}_i , \quad (6.12)$$

где $L_i = x_j - x_i$ обозначает расстояние по горизонтали между узлами i и j, а

$$\widetilde{A}_i = A_i + A_j ; \ \widetilde{V}_i = V_i + V_j . \quad (6.13)$$

Выражение (6.12) может быть записано короче при использовании тригонометрических тождеств

$$\widetilde{F}_i = F_{0i}^* \sin(kx_i - \omega t + \varphi_i^*) - \rho C_{ск} \hat{v}_{xi} \widetilde{A}_i \dot{u}_i - \rho (C_{ин} - 1) \widetilde{V}_i \ddot{u}_i , \quad (6.14)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_i^* = \frac{F_{0i} \sin \varphi_i + F_{0j} \sin(\varphi_j + kL_i)}{F_{0i} \cos \varphi_i + F_{0j} \cos(\varphi_j + kL_i)} ; \quad (6.15)$$

$$F_{0i}^* = \frac{F_{0i} \cos \varphi_i + F_{0j} \cos(\varphi_j + kL_i)}{\cos \varphi_i^*} . \quad (6.16)$$

Помимо волновых нагрузок на каждый пояс системы будут действовать инерционные силы, связанные с ускорениями масс этого пояса. Для определения значений инерционных сил приведем массы элементов, соединяющихся в узле (в том числе вклады от элементов на фронтальной и тыловой сторонах сооружения), к сосредоточенным в самих узлах, причем в узлах *4* и *8* сосредоточиваются также и массы от верхнего строения сооружения. Суммарные массы $\widetilde{m}_i$ пояса $i-j$ составляются из сосредоточенных масс в узлах i и j, а инерционная сила, действующая на этот пояс, равна $-\widetilde{m}_i \ddot{u}_i$ (точки над переменной означают производные по времени).

Наконец, чтобы приближенно учесть силы сопротивления, как следствие внутреннего трения в системе, представим их для пояса $i-j$ в виде $-\widetilde{C}_i \dot{u}_i$, где $\widetilde{C}_i$ – коэффициент сопротивления.

Сложив вместе полученные результаты, получим выражение суммарной нагрузки, действующей на пояс $i-j$ системы,

$$\widetilde{F}_i^{\Sigma} = \widetilde{F}_i - \widetilde{m}_i \ddot{u}_i - \widetilde{C}_i \dot{u}_i . \quad (6.17)$$

Полагая систему закрепленной на уровне *1–5*, суммарные нагрузки, действующие на три других пояса, можно представить в матричной форме:

$$\left\{\widetilde{F}^{\Sigma}\right\} = \left\{\widetilde{F}\right\} - [\widetilde{m}] \left\{\ddot{u}\right\} - [\widetilde{C}] \left\{\dot{u}\right\} , \quad (6.18)$$

где

$$\left\{\widetilde{F}^{\Sigma}\right\} = \begin{Bmatrix} \widetilde{F}_2^{\Sigma} \\ \widetilde{F}_3^{\Sigma} \\ \widetilde{F}_4^{\Sigma} \end{Bmatrix} ; \ \left\{\widetilde{F}\right\} = \begin{Bmatrix} \widetilde{F}_2 \\ \widetilde{F}_3 \\ \widetilde{F}_4 \end{Bmatrix} ; \ \left\{u\right\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} ;$$

$$[\widetilde{m}] = \begin{bmatrix} \widetilde{m}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{m}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{m}_4 \end{bmatrix} ; \ [\widetilde{C}] = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{C}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{C}_4 \end{bmatrix} ,$$

а $\left\{\dot{u}\right\}$ и $\left\{\ddot{u}\right\}$ формируются из первых и вторых соответственно производных от компонент вектора $\{u\}$.

Полученные выше силы можно связать с горизонтальными перемещениями u_2, u_3, u_4 поясов *2–6*, *3–7* и *4–8*, используя методы, изложенные в главе 2. Как и в статических расчетах, показанных в главе 4, действительные внедренные в грунт сваи заменяются эквивалентными в виде стоек, которые защемлены понизу и имеют жесткостные характеристики на уровне поверхности грунта, отвечающие действительным сваям.

В частности, если будет сформировано матричное уравнение, связывающее силы и перемещения в узлах *2, 3, 4* и *6, 7, 8* стороны сооружения, изображенной на рис. 6.3, то можно определить осредненные перемещения u_2, u_3 и u_4, которые вызваны суммарными горизонтальными силами F_2+F_6, F_3+F_7 и F_4+F_8, приложенными к рассматриваемой стороне сооружения. Эту связь можно представить в виде

$$u = [K]^{-1}\left\{\widetilde{F}^{\Sigma}\right\}. \tag{6.19}$$

Первый столбец матрицы $[K]^{-1}$ получается при условии, что $F_2 = F_6 = 0,5$, т. е. $F_2^{\Sigma} = 1$, а все остальные узловые усилия равны нулю. Определенные при этом условии осредненные перемещения поясов *2–6*, *3–7* и *4–8* составят первый столбец матрицы $[K]^{-1}$. Аналогично получаются остальные два столбца матрицы. Обращением полученной таким образом матрицы $[K]^{-1}$ находят матрицу жесткости, связывающую горизонтальные силы и перемещения боковой стороны сооружения

$$\left\{\widetilde{F}^{\Sigma}\right\} = [K]\,\{u\}. \tag{6.20}$$

Исключая из формул (6.18) и (6.20) $\left\{\widetilde{F}^{\Sigma}\right\}$ и используя (6.14) при $C_{\text{ск}} = 1$, $C_{\text{ин}} = 2$, получаем уравнение движения системы в виде

$$[m^*]\{\ddot{u}\} + [C^*]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F^*\}, \tag{6.21}$$

где

$$[m^*] = \begin{bmatrix} \widetilde{m}_2+\rho\widetilde{V}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{m}_3+\rho\widetilde{V}_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_4+\rho\widetilde{V}_4 \end{bmatrix}; \tag{6.22}$$

$$[C^*] = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_2+\rho\widetilde{A}_2\hat{v}_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{C}_3+\rho\widetilde{A}_3\hat{v}_{x3} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{C}_4+\rho\widetilde{A}_4\hat{v}_{x4} \end{bmatrix}; \tag{6.23}$$

$$\left\{F^*\right\} = \begin{Bmatrix} F_{02}^*\sin(kx_2-\omega t+\varphi_2^*) \\ F_{03}^*\sin(kx_3-\omega t+\varphi_3^*) \\ F_{04}^*\sin(kx_4-\omega t+\varphi_4^*) \end{Bmatrix}. \tag{6.24}$$

Так как точки над переменными u_2, u_3 и u_4 обозначают здесь производные по времени, матричное векторное уравнение (6.21) можно представить как три скалярных дифференциальных уравнения, из решения которых находятся горизонтальные перемещения сооружения, изображенного

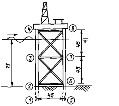


Рис. 6.4. К примеру 6.2–1.

на рис. 6.3, на уровнях *2–6*, *3–7* и *4–8*. Замечая, что матрица жесткости $[K]$ обычно содержит ненулевые побочные коэффициенты, можно сделать вывод о взаимосвязи уравнений, т. е. дифференциальное уравнение, например, для u_2 содержит не только u_2, но и u_3 и u_4.

Кроме того, отметим, что отдельные коэффициенты сопротивления $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$ и $\widetilde{C}_4$, входящие в матрицу $[C^*]$, обычно неизвестны, поэтому, чтобы избежать установления каждого коэффициента в отдельности, полагается справедливым *Рэлеево затухание*, при котором постоянные таковы, что $[C^*]$ пропорционально $[m^*]$ или $[K]$, либо является их линейной комбинацией. В нашем случае матрица $[C^*]$ диагональная, и будем полагать, что ее диагональные элементы, т. е. $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{C}_3$ и $\widetilde{C}_4$, пропорциональны соответствующим им диагональным элементам матрицы $[m^*]$. Это можно записать в виде

$$[C^*] = 2\epsilon\,[m^*], \tag{6.25}$$

где ϵ обозначает единственную постоянную, которая должна быть задана, – постоянную затухания.

Пример 6.2–1. Определим матрицу волновых нагрузок, действующих на поясы *2–6, 3–7* и *4–8* сооружения, показанного на рис. 6.4, если расчетная волна имеет высоту 12 м и длину 180 м. Все четыре стороны сооружения одинаковы, вертикальные элементы имеют внешний диаметр 1,22 м, внутренний 1,14 м; горизонтальные и наклонные элементы имеют внешний диаметр 0,61 м и внутренний диаметр 0,58 м. Значения амплитуд F_{0i} и углов сдвига фазы волновых нагрузок, действующих на отдельные узлы и подсчитанных по формулам параграфа 6,1, сведены в табл. 6.1.

Компоненты матрицы $\{F^*\}$ соответствуют первому слагаемому в выражении (6.14), т. е. $F_j^* = F_{0j}^*\sin(kx_j-\omega t+\varphi_j^*)$, где φ_j^* и F_{0j}^* определяются по (6.15) и (6.16). Отсчитав координату x от опорной колонны *2–3–4*, будем иметь $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и на основании данных табл. 6.1 получим

$$\left\{F^*\right\} = \begin{Bmatrix} 44,9\sin(-\omega t+1,07) \\ 208,6\sin(-\omega t+1,40) \\ -362,5\sin(-\omega t-1,28) \end{Bmatrix}.$$

Пример 6.2–2. Вновь рассмотрим сооружение из предыдущего примера и построим матрицу масс $[m^*]$, связанную с динамической реакцией поясов *2–6, 3–7* и *4–8*. Вес верхнего строения положим равным 6,5 МН.

Таблица 6.1. **К определению волновых нагрузок на узлы**

Узлы	A_i, м²	V_i, м³	y_i, м	E_i, м/с	v_{xi}, м/с	F_{0i}, кН	φ_i, рад
2; 6	*75,44*	*49,55*	*0*	*0,518*	*0,439*	*31,7*	*0,281*
3; 7	116,4	78,13	45	1,300	1,103	147,6	0,618
4; 8	40,97	28,57	75	3,560	2,993	256,3	1,081

Ненулевые диагональные компоненты m_1^*, m_2^* и m_3^* матрицы масс выражаются согласно (6.22) через сосредоточенные массы $\widetilde{m}_2$, $\widetilde{m}_3$, $\widetilde{m}_4$ и приведенные объемы $\widetilde{V}_2$, $\widetilde{V}_3$, $\widetilde{V}_4$ на трех уровнях:

$$m_2^* = \widetilde{m}_2 + \rho\widetilde{V}_2;\; m_3^* = \widetilde{m}_3 + \rho\widetilde{V}_3;\; m_4^* = \widetilde{m}_4 + \rho\widetilde{V}_4,$$

где ρ – плотность воды.

Для подсчета приведенных масс определим сначала массы вертикальных, горизонтальных и наклонных элементов. Для элементов, выполненных из стали, плотность равна 7,75 т/м³. Нижние элементы заполнены водой полностью, а верхние – до уровня спокойной воды. Результаты подсчета масс отдельных элементов сведены в табл. 6.2.

Чтобы определить массу $\widetilde{m}_2$, надо найти полусумму масс всех элементов, соединяющихся в узлах *2* и *6*. Для элементов на боковой стороне, соединяющихся в узле *2*, получим $0{,}5 \cdot 90{,}9 + 0{,}5 \cdot 21{,}0 + 0{,}5 \cdot 29{,}8 = 70{,}0$ т.

Для элементов фронтальной стороны: $0{,}5 \cdot 21{,}0 + 0{,}5 \cdot 29{,}8 = 25{,}4$ т.

Отсюда, сосредоточенная в узле *2* масса (если не принимать во внимание вклад от погруженной в грунт сваи) равна 95,4 т. Такая же масса сосредоточена в узле *6*, следовательно, $m_2 = 2 \cdot 95{,}4 = 190{,}8$ т.

Аналогичным образом для узлов *3* и *7* найдем $m_3 = 2 \cdot 161{,}1 = 322{,}2$ т.

И наконец, рассмотрев узлы *4* и *8*, найдем что сосредоточенные в них *массы элементов в сумме равны 146,5 т. К этой массе необходимо добавить* половину общей массы верхнего строения, т. е. $\frac{1}{2}\,\frac{6{,}5 \cdot 10^3}{9{,}81} = 331{,}3$ т. Таким образом,

$$\widetilde{m}_4 = 146{,}5 + 331{,}3 = 477{,}8 \text{ т.}$$

Далее подсчитаем приведенные объемы элементов для каждого из трех поясов сооружения. Они равны сумме объемов, соответствующих каждому отдельному узлу пояса. По результатам, полученным в примере 6.2–1,

Таблица 6.2. Массы отдельных элементов сооружения в тоннах

Элемент	Местоположение элемента	
	внизу	вверху
Вертикальный	90,9	82,1
Горизонтальный	21,0	8,4
Наклонный	29,8	23,8

$$\widetilde{V}_2 = V_2 + V_6 = 99{,}10 \text{ м}^3;$$

$$\widetilde{V}_3 = V_3 + V_7 = 156{,}26 \text{ м}^3;$$

$$\widetilde{V}_4 = V_4 + V_8 = 57{,}15 \text{ м}^3.$$

Таблица 6.3. **Данные к построению матрицы жесткости системы**

F_2^Σ, кН	F_3^Σ, кН	F_4^Σ, кН	u_2, мм	u_3, мм	u_4, мм
1	*0*	*0*	*0,2058*	*0,2000*	*0,2091*
0	1	0	0,2090	0,2286	0,2332
0	0	1	0,2091	0,2332	0,2573

Соединив полученные выше результаты, найдем

$$m_2^* = 190{,}8 + 1{,}025 \cdot 99{,}10 = 292{,}4 \text{ т};$$

$$m_3^* = 322{,}2 + 1{,}025 \cdot 156{,}26 = 482{,}4 \text{ т};$$

$$m_4^* = 477{,}8 + 1{,}025 \cdot 57{,}14 = 536{,}4 \text{ т.}$$

Отсюда матрица масс (в тоннах)

$$[m^*] = \begin{bmatrix} 292{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 482{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 536{,}4 \end{bmatrix}.$$

Пример 6.2–3. По результатам статических расчетов сооружения, (пример 6.2–1), проведенных для единичных нагрузок $F_2^\Sigma = F_2 + F_6$ и других, получены средние значения горизонтальных перемещений u_2, u_3 и u_4 поясов *2–6*, *3–7* и *4–8*, которые представлены в табл. 6.3. По этим данным требуется построить матрицу жесткости $[K]$, используемую для определения динамических перемещений трех поясов сооружения.

Соотношение между перемещениями и нагрузками представим в виде

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0{,}2058 & 0{,}2090 & 0{,}2091 \\ 0{,}2090 & 0{,}2286 & 0{,}2332 \\ 0{,}2091 & 0{,}2332 & 0{,}2573 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2^\Sigma \\ F_3^\Sigma \\ F_4^\Sigma \end{Bmatrix}.$$

Обращая это матричное уравнение, находим матрицу жесткости в килоньютонах на метр, связывающую нагрузки F_2^Σ, F_3^Σ и F_4^Σ с перемещениями u_2, u_3 и u_4:

$$[K] = \begin{bmatrix} 71{,}10 & -79{,}86 & 14{,}60 \\ -79{,}86 & 147{,}0 & -68{,}47 \\ 14{,}60 & -68{,}47 & 54{,}02 \end{bmatrix}.$$

6.3. Разложение по формам собственных колебаний

Матричное уравнение (6.21) выведено для случая, когда сооружение может быть представлено системой с тремя подвижными поясами. В общем случае, когда число таких поясов равно n, выполнение описанных выше процедур приведет к аналогичному матричному уравнению, в котором матрицы $[m^*]$, $\{u\}$ и другие имеют просто большие размеры соответственно числу дополнительных поясов. Таким образом, матричное уравнение, отражающее перемещения системы в предположении, что демпфирование может быть описано выражением (6.25), записывается в виде

$$[m^*]\{\ddot{u}\} + 2\varepsilon[m^*]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F^*\}. \tag{6.26}$$

Для решения системы дифференциальных уравнений, представленной в форме последнего матричного уравнения, можно прибегнуть к разложению по формам собственных колебаний, которое позволяет получить систему *не связанных между собой уравнений, решаемых независимо друг* от друга, причем сложенные вместе результаты решения этих уравнений дают решение первоначальной системы связанных уравнений. В качестве иллюстрации снова ограничимся случаем, когда уравнение (6.26) относится к системе, имеющей только три подвижных пояса.

Для начала рассмотрим частный вид уравнения (6.26), описывающего незатухающие свободные колебания системы,

$$[m^*]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0. \tag{6.27}$$

Это матричное векторное уравнение включает три скалярных уравнения, решения которых можно представить в виде

$$\{u\} = \{u_0\}\sin\omega t, \tag{6.28}$$

где $\{u_0\}$ – матрица-столбец, составленная из компонент u_{02}, u_{03}, u_{04}. Подставив такое решение в уравнение (6.27), найдем

$$-\omega^2[m^*]\{u_0\} + [K]\{u_0\} = 0. \tag{6.29}$$

Это матричное уравнение представляет собой систему из трех однородных алгебраических уравнений относительно перемещений u_{02}, u_{03} и u_{04}:

$$\begin{aligned} &(k_{22} - m_2^*\omega^2)u_{02} + k_{23}u_{03} + k_{24}u_{04} = 0;\\ &k_{32}u_{02} + (k_{33} - m_3^*\omega^2)u_{03} + k_{34}u_{04} = 0;\\ &k_{42}u_{02} + k_{43}u_{03} + (k_{44} - m_4^*\omega^2)u_{04} = 0. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Для существования ненулевого решения этой системы необходимо, чтобы *определитель из коэффициентов перед неизвестными* u_{02}, u_{03}, u_{04} *был* равен нулю. Раскрывая определитель по правилу Крамера, получаем кубическое уравнение относительно ω^2 с корнями λ_1, λ_2 и λ_3, такими что

$$\lambda_1 = \omega_1^2;\ \lambda_2 = \omega_2^2;\ \lambda_3 = \omega_3^2, \tag{6.31}$$

причем $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$. Соответствующие им положительные значения ω_1, ω_2 и ω_3 являются круговыми частотами так называемых первой, второй

и третьей форм колебаний системы. Для получения любого из этих решений можно использовать любые два из трех уравнений, что позволит найти отношения u_{02}/u_{04}, u_{03}/u_{04}. Полагая $u_{04} = 1$, можно найти u_{02}, u_{03}, соответствующие каждому из полученных корней λ. Они определяют формы колебаний, соответствующие корням λ_1, λ_2 и λ_3.

Используя выражение (6.27) и симметричность матриц $[m^*]$ *и* $[K]$, можно получить соотношения между формами свободных колебаний, отвечающих $\lambda = \lambda_k$ и $\lambda = \lambda_l$:

$$\left.\begin{aligned} &\{u_0(\lambda_k)\}^{\mathrm{T}}[m^*]\{u_0(\lambda_l)\} = 0;\\ &\{u_0(\lambda_k)\}^{\mathrm{T}}[K]\{u_0(\lambda_l)\} = 0, \end{aligned}\right\}. \tag{6.32}$$

при этом $\lambda_k \neq \lambda_l$.

Составим матрицу относительных перемещений, соответствующих формам колебаний,

$$[P] = \begin{bmatrix} u_{02}(\lambda_1) & u_{02}(\lambda_2) & u_{02}(\lambda_3)\\ u_{03}(\lambda_1) & u_{03}(\lambda_2) & u_{03}(\lambda_3)\\ u_{04}(\lambda_1) & u_{04}(\lambda_2) & u_{04}(\lambda_3) \end{bmatrix}, \tag{6.33}$$

тогда согласно (6.32)

$$\left.\begin{aligned} &[P]^{\mathrm{T}}[m^*][P] = [m'];\\ &[P]^{\mathrm{T}}[K][P] = [K'], \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

где $[m']$ и $[K']$ – диагональные матрицы, причем

$$[K'] = [m'][\lambda]. \tag{6.35}$$

Здесь $[\lambda]$ является диагональной матрицей, у которой диагональные компоненты равны λ_1, λ_2, λ_3.

Использовав матрицу $[P]$, введем новые переменные, составляющие матрицу $\{Y\}$, так чтобы

$$\{Y\} = [P]^{-1}\{u\};\ \{u\} = [P]\{Y\}. \tag{6.36}$$

Матрица $\{Y\}$ представляет собой столбец из компонент Y_1, Y_2 и Y_3. Подставив последнее равенство в (6.26), найдем

$$[m^*][P]\{\ddot{Y}\} + 2\varepsilon[m^*][P]\{\dot{Y}\} + [K][P]\{Y\} = \{F^*\}.$$

Умножая обе части этого уравнения слева на $[P]^{\mathrm{T}}$ и используя обозначения (6.34), будем иметь

$$[m']\{\ddot{Y}\} + 2\varepsilon[m']\{\dot{Y}\} + [K']\{Y\} = [P]^{\mathrm{T}}\{F^*\}. \tag{6.37}$$

Поскольку матрицы $[m']$ и $[K']$ диагональные, то, как нетрудно убедиться, последнее матричное уравнение представляет собой три несвязанных между собой уравнения

$$\left.\begin{aligned} m_1'\ddot{Y}_1 + 2\varepsilon m_1'\dot{Y}_1 + k_{11}'Y_1 &= F_1';\\ m_2'\ddot{Y}_2 + 2\varepsilon m_2'\dot{Y}_2 + k_{22}'Y_2 &= F_2';\\ m_3'\ddot{Y}_3 + 2\varepsilon m_3'\dot{Y}_3 + k_{33}'Y_3 &= F_3', \end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

где m_1', k_{11}', F_1', ... обозначают компоненты матриц $[m']$, $[K']$ и $[P]^T$ $\{F^*\}$. Используя выражение (6.35), последние уравнения можно записать иначе:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{Y}_1 + 2\varepsilon\dot{Y}_1 + \lambda_1 Y_1 &= F_1'/m_1';\\ \ddot{Y}_2 + 2\varepsilon\dot{Y}_2 + \lambda_2 Y_2 &= F_2'/m_2';\\ \ddot{Y}_3 + 2\varepsilon\dot{Y}_3 + \lambda_3 Y_3 &= F_3'/m_3'. \end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

Компоненты F_1', F_2' и F_3' являются известными функциями времени, связанными с волновыми нагрузками как $[P]^T\{F^*\}$. Выполнив последнюю операцию и использовав формулы для тригонометрических функций суммы углов, получим выражения для составляющих сил

$$\left.\begin{aligned} F_1' &= F_{01}'\sin(-\omega t + \varphi_1');\\ F_2' &= F_{02}'\sin(-\omega t + \varphi_2');\\ F_3' &= F_{03}'\sin(-\omega t + \varphi_3') \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

и установившееся решение для Y_1, Y_2, Y_3 в форме

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= Y_{01}\sin(-\omega t + \varphi_1' + \varphi_1'');\\ Y_2 &= Y_{02}\sin(-\omega t + \varphi_2' + \varphi_2'');\\ Y_3 &= Y_{03}\sin(-\omega t + \varphi_3' + \varphi_3''), \end{aligned}\right\} \tag{6.41}$$

где φ_1'', φ_2'', φ_3'' и Y_{01}, Y_{02}, Y_{03} получаются из формул

$$\operatorname{tg}\varphi_n'' = \frac{2\varepsilon\omega}{\lambda_n - \omega^2}; \tag{6.42}$$

$$Y_{0n} = \frac{F_{0n}'/m_n'}{(\lambda_n - \omega^2)\cos\varphi_n'' + 2\varepsilon\omega\sin\varphi_n''} \tag{6.43}$$

при $n = 1, 2, 3$, соответственно.

По найденным значениям Y_1, Y_2 и Y_3 с помощью второго равенства (6.36) определяются перемещения u_2, u_3 и u_4:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= u_{02}(\lambda_1)\,Y_1 + u_{02}(\lambda_2)\,Y_2 + u_{02}(\lambda_3)\,Y_3;\\ u_3 &= u_{03}(\lambda_1)\,Y_1 + u_{03}(\lambda_2)\,Y_2 + u_{03}(\lambda_3)\,Y_3;\\ u_4 &= u_{04}(\lambda_1)\,Y_1 + u_{04}(\lambda_2)\,Y_2 + u_{04}(\lambda_3)\,Y_3. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

Последние уравнения показывают, что решения для динамических отклонений на каждом уровне сооружения могут рассматриваться как весовая сумма решений Y_1, Y_2, Y_3, причем в качестве веса используются собственные формы $u_{02}(\lambda_1)$, $u_{02}(\lambda_2)$ и т. д. Исследования относительного вклада в значение перемещений от каждой отдельной формы колебаний показывают, что, как правило, наиболее существенную роль играет первая форма колебаний, и достаточно хорошее представление о перемещениях можно получить, даже пренебрегая колебаниями второй и третьей форм, что позволяет упростить выражения (6.44) до вида

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= u_{02}(\lambda_1)\,Y_1;\\ u_3 &= u_{03}(\lambda_1)\,Y_1;\\ u_4 &= u_{04}(\lambda_1)\,Y_1. \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

Безусловно, еще лучшее приближение к точному решению можно получить, рассматривая только две первые формы колебаний и пренебрегая третьей.

В рассматриваемой здесь в качестве иллюстрации системе возникают только три формы колебаний, поскольку в ее расчетной схеме есть лишь три подвижных пояса. В более общем случае, когда число поясов равно n, процедура расчета аналогична изложенной здесь, но число форм колебаний увеличится до n. В большинстве случаев справедлив вывод о вкладе различных форм колебаний, и достаточно хорошее представление о перемещениях можно получить, рассматривая только первые две или три формы колебаний.

Низшая (отвечающая первой форме колебаний) частота ω_1 представляет собой *основную частоту* колебаний сооружения и приближенно соответствует собственной частоте θ, найденной по упрощенной схеме в параграфе 4.10. Добавим к ранее данным представлениям, что коэффициент демпфирования ε может приниматься как определенная доля от основной круговой частоты ω_1 обычно в пределах от 0,05 до 0,10, т. е. от 5 до 10 % критического демпфирования основной формы колебаний.

Пример 6.3–1. Определим горизонтальные перемещения трех поясов основания буровой платформы, изображенной на рис. 6.5. Исходные данные для расчета:

матрица приведенных масс в тоннах

$$[m^*] = \begin{bmatrix} 437{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 729{,}5 & 0\\ 0 & 0 & 875{,}4 \end{bmatrix};$$

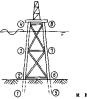


Рис. 6.5. К примеру 6.3–1.

матрица жесткости

$$[K] = 10^2 \begin{bmatrix} 146 & -146 & 29,2 \\ -146 & 292 & -116,8 \\ 29,2 & -116,8 & 87,6 \end{bmatrix}, \text{кН/м};$$

матрица волновых нагрузок

$$\{F^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 88,96\,(-\omega t + 1,0) \\ 266,9\,(-\omega t + 1,5) \end{Bmatrix}, \text{кН}$$

и круговая частота волн $\omega = 0,785$ рад/с.

Сначала с помощью выражения (6.30) определим частоты собственных колебаний системы. Обозначив $\lambda = \omega^2$ и приравняв к нулю определитель из коэффициентов при u_{02}, u_{03} и u_{04} (при этом $m_2^* = 437,7$ т, $k_{22} = 146$ кН/м и т.д.), получим следующее кубическое уравнение: $\lambda^3 - 83,3\lambda^2 + 1164\lambda - 2222 = 0$, Корни этого уравнения $\lambda_1 = 2,27$; $\lambda_2 = 14,8$; $\lambda_3 = 66,2$ позволяют определить круговые частоты колебаний $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$ и т.д.: $\omega_1 = 1,51$ рад/с; $\omega_2 = 3,85$ рад/с; $\omega_3 = 8,14$ рад/с.

Далее определим формы колебаний для каждого λ, используя любые два из трех уравнений (6.30). Результаты расчетов сведены в табл. 6.4.

Полученные результаты дают возможность сформировать матрицу $[P]$ (6.33) в численном виде:

$$[P] = \begin{bmatrix} 0,559 & -1,832 & 3,530 \\ 0,720 & -0,819 & -3,293 \\ 1,000 & 1,000 & 1,000 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно установить элементы матриц масс $[m']$ и усилий $\{F'\}$ по выражениям

$$[m'] = [P]^T [m^*] [P];$$

$$\{F'\} = [P]^T \{F^*\}.$$

Выполнив операции умножения матриц, найдем $m_1' = 1390$ т, $m_2' = 2830$ т, $m_3' = 14240$ т и килоньютонах

$$F_1' = 64,05 \sin(-\omega t + 1) + 266,9 \sin(-\omega t + 1,5);$$

$$F_2' = -72,95 \sin(-\omega t + 1) + 266,9 \sin(-\omega t + 1,5);$$

$$F_3' = -293,1 \sin(-\omega t + 1) + 266,9 \sin(-\omega t + 1,5).$$

Из тригонометрии имеем тождество

$$A \sin(\alpha + \zeta) + B \sin(\alpha + \eta) = C \sin(\alpha + \beta),$$

Таблица 6.4. Формы колебаний

λ	u_{02}	u_{03}	u_{04}
2,27	0,559	0,720	1,00
14,8	–1,832	–0,819	1,00
66,3	3,530	–3,293	1,00

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A \sin \zeta + B \sin \eta}{A \cos \zeta + B \cos \eta};$$

$$C = \frac{A \cos \zeta + B \cos \eta}{\cos \beta}.$$

Использовав эти тождества, запишем выражения для F_1', F_2' и F_3' более компактно:

$$F_1' = F_{01}' \sin(-\omega t + 1,41);$$

$$F_2' = F_{02}' \sin(-\omega t + 1,47);$$

$$F_3' = F_{03}' \sin(-\omega t - 0,14),$$

где $F_{01}' = 324,7$ кН, $F_{02}' = -205,5$ кН, $F_{03}' = -140,6$ кН.

Подставляя найденные здесь компоненты матриц масс и усилий в выражения (6.41)–(6.43) и полагая $\epsilon = 0,08\omega_1 = 0,121$, получаем выражения переменных Y_1, Y_2 и Y_3:

$$Y_1 = Y_{01} \sin(-\omega t + 1,52);$$

$$Y_2 = Y_{02} \sin(-\omega t + 1,46);$$

$$Y_3 = Y_{03} \sin(-\omega t - 0,14),$$

где $Y_{01} = 0,140$ м, $Y_{02} = -0,512 \cdot 10^{-2}$ м, $Y_{03} = -0,150 \cdot 10^{-3}$ м.

*И, наконец, выразим через Y_1, Y_2 и Y_3 перемещения u_2, u_3, u_4 поя*сов системы в соответствии с выражением (6.44). Вклад от Y_3, очевидно, пренебрежимо мал, следовательно,

$$u_2 = 0,559 Y_1 - 1,83 Y_2;$$

$$u_3 = 0,720 Y_1 - 0,819 Y_2;$$

$$u_4 = Y_1 + Y_2.$$

Подставив значения Y_1 и Y_2 и использовав приведенные выше тригонометрические тождества, получим в метрах

$$u_2 = 0{,}069\sin(-\omega t + 1{,}50);\quad u_3 = 0{,}097\sin(-\omega t + 1{,}51);$$

$$u_4 = 0{,}145\sin(-\omega t + 1{,}53).$$

Интересно сравнить максимальное перемещение, полученное равным 0,145 м на основании проведенного здесь динамического расчета, с тем *значением, которое соответствует случаю пренебрежения силами инерции* и демпфированием. Подставив значения узловых волновых нагрузок $\{F^*\}$ в уравнение (6.26), которое в результате пренебрежения силами инерции и демпфированием получает вид

$$\{u\} = [K]^{-1}\{F^*\},$$

найдем, что максимальное перемещение опорного основания на уровне верхнего строения $u_4 = 0{,}108$ м. Как видно, учет динамического характера внешнего воздействия дает увеличение перемещения примерно на 35 %.

6.4. Итерационный метод определения форм колебаний

В рассмотренном выше методе решения уравнений динамики сооружений частоты и формы собственных колебаний определялись непосредственно из (6.29) путем приравнивания к нулю определителя, составленного из коэффициентов этого уравнения. Для сооружений, имеющих два или три подвижных пояса, такой способ решения вполне приемлем, поскольку он сопряжен с выполнением сравнительно небольшого объема алгебраических операций. Однако, у большей части сооружений континентального шельфа таких подвижных поясов, а значит частот и форм колебаний, достаточно много. Алгебраический способ определения частот и форм колебаний в этом случае становится трудоемким, а преимущество получают численные и, в частности, итерационные методы.

Рассмотрим для иллюстрации метода систему с n подвижными поясами. Матричное уравнение, с помощью которого могут быть определены частоты и формы колебаний, имеет тот же вид (6.29), при этом под $\{u_0\}$ теперь понимается матрица-столбец с n компонентами, а $[m^*]$ и $[K]$ – *квадратные матрицы n-го порядка. С целью проведения итераций* представим это уравнение в виде

$$[u_0] = \omega^2[K]^{-1}[m^*]\{u_0\}. \tag{6.46}$$

Если теперь придать компонентам матрицы $\{u_0\}$ произвольные значения, причем если последний из них считать единичным, то подставляя эти значения в правую часть уравнения (6.46), можно найти новые значения компонент (в долях от ω^2). Новые значения $\{u_0\}$ могут быть нормализованы путем вынесения в качестве множителя последнего элемента $u_{0n}\omega^2$, и эти значения вновь подставляются в (6.46) для определения значений $\{u_0\}$ на следующем шаге итерационного процесса. Полученные значения вновь *нормализуются соответственно значению последнего компонента $u_{0n}\omega^2$.* Если полученная после нормализации матрица $\{u_0\}$ совпадает с использованной в этой итерации, форма колебаний может считаться установленной, а соответствующая ей частота находится из условия $u_{0n}\omega^2 = 1$. Если совпадение матриц $\{u_0\}$ не достигнуто, итерационный процесс продолжается до получения сходимости.

Общей характеристикой итерационного процесса подобного типа является стремление решения к значению, соответствующему наинизшей частоте ω^2 и являющемуся основной формой колебания. Когда это решение получено, необходимо видоизменить уравнение (6.46), чтобы получить вторую форму колебаний.

С этой целью воспользуемся первым матричным уравнением (6.32), которое можно записать (в предположении, что на уровне *1* система закреплена от перемещений) следующим образом:

$$u_{02}(\lambda_i)u_{02}(\lambda_j)m_2^* + u_{03}(\lambda_i)u_{03}(\lambda_j)m_3^* + \ldots = 0,\ \lambda_i \neq \lambda_j, \tag{6.47}$$

где $u_{02}(\lambda_i)$ означает перемещение пояса *2* при свободных колебаниях системы по форме $\lambda_i = \omega_i^2$; $u_{02}(\lambda_j)$ означает те же перемещения при колебаниях системы по форме $\lambda_j = \omega_j^2$ и т. д. Если теперь принять $\lambda_i = \lambda_1$ и обозначить $u_{02} = u_{02}(\lambda_j)$, $u_{03} = u_{03}(\lambda_j)$, …, то для системы, имеющей, например, четыре пояса, получим

$$u_{02} = a_3u_{03} + a_4u_{04} + a_5u_{05}, \tag{6.48}$$

где

$$a_3 = -\frac{u_{03}(\lambda_1)\,m_3^*}{u_{02}(\lambda_1)m_2^*};\quad a_4 = -\frac{u_{04}(\lambda_1)\,m_4^*}{u_{02}(\lambda_1)\,m_1^*};\quad a_5 = -\frac{u_{05}(\lambda_1)\,m_5^*}{u_{02}(\lambda_1)\,m_2^*}.$$

С учетом тождеств $u_{03} = u_{03}$, $u_{04} = u_{04}$ и $u_{05} = u_{05}$ можно написать выражение для матрицы $\{u_0\}$, включающей эти компоненты,

$$\{u_0\} = [S]\{u_0\}, \tag{6.49}$$

где

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (6.47) следует, что если компоненты матрицы $\{u_0\}$ в правой части равенства (6.49) не относятся к первой форме колебаний, оно становится просто тождеством. Однако, если компоненты $\{u_0\}$ соответствуют первой форме колебаний, правая часть равенства не будет приводить к тождественным значениям, так как уравнение (6.47) не применимо к случаю $\lambda_j = \lambda_i$.

Представим матричное уравнение (6.46) в виде

$$\{u_0\} = \omega^2 [K]^{-1} [m^*] [S] \{u_0\} . \tag{6.50}$$

Тогда итерационный процесс, описанный выше, приводит к наинизшей форме колебаний, которая в этом случае соответствует уже второй форме. Первая форма колебаний исключена из рассмотрения перемещений $\{u_0\}$ в правой части равенства (6.50). Матрица $[S]$ *именуется матрицей исключения*.

После определения второй формы колебаний может быть построена новая матрица $[S]$, исключающая первую и вторую форму колебаний.

Решение матричного уравнения (6.50) с этой новой матрицей $[S]$, получаемое итерационным методом, приводит к определению третьей формы колебаний. Этот процесс может повторяться соответствующее количеству форм число раз.

Для построения матрицы $[S]$, исключающей первую и вторую формы, представим уравнение (6.47) в виде

$$u_{02} = \beta_3 u_{03} + \beta_4 u_{04} + \beta_5 u_{05} , \tag{6.51}$$

где

$$\beta_3 = -\frac{u_{03}(\lambda_2)\, m_3^*}{u_{02}(\lambda_2)\, m_2^*}; \; \beta_4 = -\frac{u_{04}(\lambda_2)\, m_4^*}{u_{02}(\lambda_2)\, m_2^*}; \; \beta_5 = -\frac{u_{05}(\lambda_2)\, m_5^*}{u_{02}(\lambda_2)\, m_2^*} .$$

Объединяя последнее уравнение с (6.48), можно выразить u_{02} и u_{03} через u_{04} и u_{05}:

$$u_{02} = \gamma_1 u_{04} + \gamma_2 u_{05};$$

$$u_{03} = \gamma_3 u_{04} + \gamma_4 u_{05},$$

где γ_1, γ_2 и т. д. – постоянные. В этом случае матрица исключения имеет вид

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Уместно отметить, что вычисления, связанные с определением высших форм колебаний, могут проводиться и без помощи матрицы исключения. Это объясняется тем, что уравнение (6.46) после обращения получает вид

$$\{u_0\} = (1/\omega^2)\, [m^*]^{-1} [K] \{u_0\} . \tag{6.52}$$

Итерационный процесс, применяемый для решения этого уравнения, будет сходиться к наименьшим значениям $1/\omega^2$, т. е. к высшим частотам.

Пример 6.4–1. Определим, применяя итерационный метод, круговые частоты и формы собственных колебаний системы, рассмотренной в примере 6.3–1.

Подставив полученные в примере 6.3–1 матрицы $[K]$ и $[m^*]$ в уравнение (6.46), будем иметь

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0{,}084 & 0{,}110 & 0{,}120 \\ 0{,}066 & 0{,}140 & 0{,}180 \\ 0{,}060 & 0{,}150 & 0{,}300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} .$$

Полагая единичными значения u_{02}, u_{03} и u_{04} в правой части этого матричного уравнения, получаем

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0{,}084 & 0{,}110 & 0{,}120 \\ 0{,}066 & 0{,}140 & 0{,}180 \\ 0{,}060 & 0{,}150 & 0{,}300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0{,}510\omega^2 \begin{Bmatrix} 0{,}616 \\ 0{,}757 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix} .$$

Повторив вычисления при новых значениях компонент $\{u_0\}$, найдем

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0{,}084 & 0{,}110 & 0{,}120 \\ 0{,}066 & 0{,}140 & 0{,}180 \\ 0{,}060 & 0{,}150 & 0{,}300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}616 \\ 0{,}757 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix} = 0{,}451\omega^2 \begin{Bmatrix} 0{,}565 \\ 0{,}725 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix} .$$

Проделав такую операцию еще несколько раз, получим

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0{,}084 & 0{,}110 & 0{,}120 \\ 0{,}066 & 0{,}140 & 0{,}180 \\ 0{,}060 & 0{,}150 & 0{,}300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}558 \\ 0{,}719 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix} = 0{,}441\omega^2 \begin{Bmatrix} 0{,}558 \\ 0{,}719 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix} .$$

Значения величин, полученные в правой части матричного равенства, равны заданным в левой части. Круговая частота, соответствующая первой форме колебаний, находится из условия $0{,}441\omega^2 = 1$, таким образом, первая форма колебаний описывается следующими параметрами: $\omega_1 = 1{,}51$ рад/с; $u_{02} = 0{,}558$; $u_{03} = 0{,}719$; $u_{04} = 1{,}000$.

Для вычисления характеристик второй формы колебаний используем матрицу исключения $[S]$, формируемую с помощью выражения (6.48)

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -2{,}148 & -3{,}584 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Уравнение (6.50) получает такой вид:

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & -0{,}0704 & -0{,}1811 \\ 0 & -0{,}0018 & -0{,}0565 \\ 0 & 0{,}0211 & 0{,}0850 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix}$$

Полагая компоненты матрицы $\{u_0\}$ в правой части этого матричного равенства равными единице, получаем

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & -0{,}0704 & -0{,}1811 \\ 0 & -0{,}0018 & -0{,}0565 \\ 0 & 0{,}0211 & 0{,}0850 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0{,}1061\omega^2 \begin{Bmatrix} -2{,}370 \\ -0{,}549 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix}.$$

Проделав такую операцию еще несколько раз, найдем

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & -0{,}0704 & -0{,}1811 \\ 0 & -0{,}0018 & -0{,}0565 \\ 0 & 0{,}0211 & 0{,}0850 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1{,}830 \\ -0{,}809 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix} = 0{,}0680\omega^2 \begin{Bmatrix} -1{,}830 \\ -0{,}809 \\ 1{,}000 \end{Bmatrix},$$

т. е. $\omega_2 = 3{,}83$ рад/с; $u_{02} = -1{,}830$; $u_{03} = -0{,}809$; $u_{04} = 1{,}000$.

Наконец, для определения характеристик третьей формы колебаний рассмотрим уравнения *(6.48)* и *(6.51)* в форме

$$u_{02} = -2{,}148u_{03} - 3{,}584u_{04};$$

$$u_{02} = -0{,}737u_{03} + 1{,}093u_{04}.$$

Решив эти уравнения, получим $u_{02} = 3{,}537u_{04}$; $u_{03} = -3{,}315u_{04}$. Таким образом, матрица $[S]$ получает вид

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3{,}537 \\ 0 & 0 & -3{,}315 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставив это в уравнение (6.50), найдем

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}0525 \\ 0 & 0 & -0{,}0507 \\ 0 & 0 & 0{,}0150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix}$$

Выполнив итерации, аналогичные показанным ранее, получим

$$\begin{Bmatrix} u_{02} \\ u_{03} \\ u_{04} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}0525 \\ 0 & 0 & -0{,}0507 \\ 0 & 0 & 0{,}0150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3{,}50 \\ -3{,}38 \\ 1{,}00 \end{Bmatrix} = 0{,}0150\omega^2 \begin{Bmatrix} 3{,}50 \\ -3{,}38 \\ 1{,}00 \end{Bmatrix},$$

т. е. $\omega_3 = 8{,}16$ рад/с; $u_{02} = 3{,}50$; $u_{03} = -3{,}38$; $u_{04} = 1{,}00$.

Как видно, эти результаты согласуются с учетом погрешностей округления с полученными в примере 6.3–1.

6.5. Расчеты напряжений

После того, как горизонтальные перемещения каждого пояса сооружения определены, они могут быть использованы для нахождения напряжений в каждом отдельном элементе. Для этого сначала требуется

установить вертикальные перемещения и углы поворота концов элементов, связанные с горизонтальными перемещениями. Рассмотрим для примера элемент *2–3* сооружения, показанного на рис. 6.3. Обозначим $\{q\}$ матрицу-столбец, элементами которой являются вертикальное перемещение v_2 и угол поворота θ_2 в узле *2* и вертикальное перемещение v_3 и угол поворота θ_3 в узле *3*. Тогда соотношение между этой матрицей и матрицей-столбцом $\{F^\Sigma\}$ составляющих горизонтальных нагрузок можно записать в виде

$$\{q\} = [D]\{F^\Sigma\}, \tag{6.53}$$

где $[D]$ обозначает соответствующую матрицу преобразования.

Отдельные компоненты матрицы $[D]$ могут быть определены из статического расчета системы на горизонтальные узловые усилия. Так, если приложить к узлам пояса *2–6* горизонтальные усилия $F_2 = F_6 = 0{,}5$, т. е. $F_2^\Sigma = 1$, и положить равными нулю все остальные силы и моменты, то вычисленные перемещения v_2, θ_2 и v_3, θ_3 составят первый столбец матрицы $[D]$. Аналогичным образом могут быть получены два других столбца этой матрицы.

Нагрузки $\{F^\Sigma\}$ связаны с горизонтальными перемещениями $\{u\}$ посредством матрицы $[K]$ соотношением (6.20), следовательно, связь вертикальных перемещений и углов поворота в узлах с горизонтальными перемещениями может быть представлена в виде

$$\{q\} = [D][K]\{u\}. \tag{6.54}$$

Вертикальные перемещения и углы поворота концов элемента, соответствующие любому моменту времени, могут быть определены по известным горизонтальным перемещениям u_2, u_3, u_4 на основании зависимости (6.54). Далее с помощью матрицы жесткости элемента можно вычислить внутренние усилия, действующие по концам элемента. Затем с помощью формул, приведенных в главе 2, можно подсчитать напряжение в элементах от соответствующих продольных сил и изгибающих моментов.

Определенные по описанной выше методике внутренние усилия, действующие на фундаментную часть сооружения, необходимы не только для подсчета напряжений, но и для определения жесткостных характеристик эквивалентных свай – защемленных понизу стоек, заменяющих заглубленные в грунт сваи. Способ определения этих жесткостных характеристик подобен применяемому в статических расчетах (см. главу 4). В частности, найденные максимальные значения внутренних горизонтальных сил *и изгибающих моментов, действующие на фундамент сооружения* (головы свай), используются для определения жесткостных характеристик свай в соответствии с методикой, изложенной в главе 5. Полученные жесткостные характеристики используются далее для расчета максимальных горизонтальных сил и моментов, действующих на фундаментную часть сооружения. Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто согласование между предполагаемыми и полученными в результате расчета значениями максимальных усилий и моментов, действующих на фундаментную часть сооружения.

Напряжения в элементах, определяемые на основании описываемых здесь методов расчета, обусловлены только волновой нагрузкой. Тем самым вклад нагрузок от ветра, течения и веса полагается пренебрежимым в сравнении с напряжениями от волновой нагрузки. Для выяснения возможности перенапряжения конструкции вследствие динамических эффектов следует провести независимые оценки вкладов этих воздействий в напряженное состояние, с тем чтобы либо убедиться в их действительно *пренебрежимой малости, либо объединить в нагрузку, которая может* вызвать перенапряжение.

Напряжения от статически приложенных ветровых нагрузок поначалу могут быть оценены по горизонтальным перемещениям поясов сооружения, определенным с помощью матричного уравнения (6.20), в котором все компоненты суммарной нагрузки, кроме той, что приложена к самому верхнему поясу и вызвана ветровой нагрузкой на платформу, приравниваются к нулю. Считая волновые нагрузки доминирующими в формировании напряженно-деформированного состояния сооружения, жесткостные характеристики эквивалентных свай, необходимые для расчета на ветровые нагрузки, можно принимать одинаковыми с теми, что были установлены в ходе динамического расчета. По найденным горизонтальным перемещениям поясов сооружения напряжения, обусловленные ветровой нагрузкой, могут быть определены точно так же, как и в случае волновых воздействий.

Аналогичным образом могут быть подсчитаны напряжения от статически приложенных нагрузок, вызванных течением, в предположении малости скорости течения по сравнению со средней скоростью движения воды в выражении (6.11). В этих условиях силы, действующие на узлы различных поясов сооружения, можно определить по первому слагаемому в правой части выражения (6.3) при замене скорости v_{xi} на скорость течения $v_т$. Суммарные нагрузки в уравнении (6.20) получаются сложением узловых нагрузок, приложенных к отдельным поясам сооружения.

Вклад сил веса и поддержания в напряженное состояние элементов можно оценить методами статического расчета, изложенными в главе 4, принимая для упрощения взволнованную поверхность моря за спокойную.

Наконец, следует заметить, что погрешность в определении напряжений при динамическом расчете заложена в упрощенном представлении волновых и инерционных сил, как сосредоточенных на поясах сооружения. *Для получения более точных результатов в сооружении могут быть* образованы дополнительные (фиктивные) пояса. Если в результате повторного динамического расчета будут получены напряжения, существенно отличающиеся от вычисленных ранее, потребуется последующее увеличение числа расчетных поясов, и так процесс будет продолжаться до тех пор, *пока разница в результатах, соответствующих двум последовательным* приближениям, не станет пренебрежимо малой.

Пример 6.5–1. Определим напряжения в сечении *2* элемента *2–3* стального сооружения, показанного на рис. 6.6, соответствующие найденным в результате динамического расчета перемещениям $u_2 = 0{,}15$ м, $u_3 = 0{,}18$ м и $u_4 = 0{,}30$ м. Матрица жесткости в меганьютонах на метр, которая была использована в динамическом расчете, имеет следующий вид:

$$[K] = \begin{bmatrix} 71{,}1 & -79{,}9 & 14{,}6 \\ -79{,}9 & 147{,}0 & -68{,}5 \\ 14{,}6 & -68{,}5 & 54{,}0 \end{bmatrix}.$$

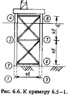


Рис. 6.6. К примеру 6.5–1.

Элемент *2–3* имеет такие характеристики поперечного сечения: $D = 1{,}22$ м; $I = 0{,}0246$ м^4 и $A = 0{,}141$ м^2. Результаты статического расчета на единичные горизонтальные нагрузки F_2^{Σ}, F_3^{Σ} и F_4^{Σ} позволяют получить значения вертикальных перемещений узлов *2* и *3*, которые сведены в табл. 6.5.

Соотношение [(выраженное в форме (6.53)] между вертикальными перемещениями и углами поворота узлов *2* и *3* с одной стороны и горизонтальными нагрузками, приложенными к поясам, получает в данном случае следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0{,}240 & 1{,}590 & 2{,}960 \\ 9{,}218 & 9{,}667 & 9{,}667 \\ 0{,}315 & 2{,}467 & 5{,}393 \\ -2{,}518 & -2{,}248 & -1{,}978 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2^{\Sigma} \\ F_3^{\Sigma} \\ F_4^{\Sigma} \end{Bmatrix}.$$

Здесь матрица $[D]$ построена по данным табл. 6.5, а усилия F_i^{Σ} должны задаваться в меганьютонах. Далее, подставив полученную матрицу $[D]$ и заданную выше матрицу $[K]$ в выражение (6.54), получим

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0{,}240 & 1{,}590 & 2{,}960 & 71{,}1 & -79{,}9 & 14{,}6 \\ 9{,}218 & 9{,}667 & 9{,}667 & & & \\ 0{,}315 & 2{,}467 & 5{,}393 & -79{,}9 & 147{,}0 & -68{,}5 \\ -2{,}518 & -2{,}248 & -1{,}978 & 14{,}6 & -68{,}5 & 54{,}0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix},$$

или

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -66{,}7 & 11{,}8 & 54{,}4 \\ 24{,}1 & 22{,}3 & -5{,}4 \\ -95{,}9 & -31{,}9 & 126{,}8 \\ -28{,}3 & 6{,}2 & 10{,}4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}.$$

Таблица 6.5. Перемещения узлов

F_2^{Σ}, МН	F_3^{Σ}, МН	F_4^{Σ}, МН	v_2, мм	θ_2, 10^{-3} рад	v_3, мм	θ_3, 10^{-3} рад
1	0	0	0,240	9,218	0,315	−2,518
0	1	0	1,590	9,667	2,467	−2,248
0	0	1	2,960	9,667	5,393	−1,978

Подставив заданные значения перемещений u_2, u_3 и u_4, соответствующих динамическому воздействию, найдем

$$v_2 = 8{,}44 \cdot 10^{-3}\ \text{м};\ \theta_2 = 6{,}01 \cdot 10^{-3}\ \text{рад};$$

$$v_3 = 17{,}91 \cdot 10^{-3}\ \text{м};\ \theta_3 = -0{,}01 \cdot 10^{-3}\ \text{рад}.$$

С помощью матрицы жесткости элемента *2–3* определим внутренние усилия, действующие в сечении *2*

$$f_{2y} = \frac{EA}{l}(v_2 - v_3) = -6{,}23\ \text{МН};$$

$$m_2 = \frac{6EI}{l^2}(u_2 - u_3) + \frac{2EI}{l}(2\theta_2 - \theta_3) = 2{,}30\ \text{МН} \cdot \text{м}.$$

Найденное значение усилия f_{2y} соответствует по направлению растяжению элемента *2–3*; таким образом, напряжение от продольной силы $\sigma_N = f_{2y}/A = 44{,}18$ МПа.

Напряжение от изгибающего момента (на внешней поверхности элемента):

$$\sigma_M = \pm m_2 R/I = \pm 57{,}03\ \text{МПа}.$$

6.6. Динамическая реакция на нерегулярные волны

Изложенный выше динамический расчет сооружения касается случая, когда внешнее воздействие упрощенно представлено синусоидальными волнами. Если этот расчет указывает на существенное влияние динамического характера воздействия, то вопрос о точности представления расчетного волнения приобретает особое значение, поскольку коэффициент динамичности очень чувствителен к точности задания расчетных характеристик волнения и степени регулярности волн. В этих условиях следует продолжить динамический расчет, включив в него нерегулярные (случайные) волны, которые лучше отражают состояние поверхности моря в штормовых условиях.

В расчетах сооружений нерегулярные волны представляются в виде бесконечной суммы волн, различных по амплитудам и случайных по фазе, движущихся в одном и том же направлении x. Отклонение η взволнованной поверхности воды от спокойного уровня выражается в таком случае следующим образом:

$$\eta = \sum_n A_n \cos(k_n x - \omega_n t + \epsilon_n), \tag{6.55}$$

где A_n, k_n, ω_n и ϵ_n обозначают соответственно амплитуду (равную половине высоты волны), волновое число, круговую частоту и фазу n-й волны. Волновое число и круговая частота волны связаны между собой соотношением

$$\omega_n^2 = g k_n \operatorname{th} k_n h, \tag{6.56}$$

где g – ускорение свободного падения; h – глубина воды.

Углы фазы ϵ_n полагаются распределенными равномерно в интервале от 0 до 2π, т. е. так, что появление любого ее значения равновероятно. Амплитуда A_n, связанная с частотой волны, в малом интервале $\Delta\omega$ вблизи значения ω_n в дальнейшем принимается соответствующей выражению

$$0{,}5A_n^2 = S_n \Delta\omega, \tag{6.57}$$

в котором S_n зависит от частоты и именуется как амплитудный или энергетический спектр.

Этот спектр определяется на основании наблюдений и измерений параметров волн. Наиболее распространенными на практике в настоящее время являются спектры Бретшнейдера [3], Пирсона и Московица [33], выражаемые в форме

$$S_\eta = (A/\omega^5)\exp(-B\omega^{-4}), \tag{6.58}$$

в котором A и B – параметры спектра. Согласно Бретшнейдеру

$$A = 1{,}819 H_s^2 (2\pi/T_s)^4;\ B = 0{,}675(2\pi/T_s)^4, \tag{6.59}$$

где H_s – высота значительных волн (в метрах), равная среднему значению высот одной трети наиболее крупных волн; T_s – соответствующий период значительных волн, с. Параметры элементов значительных волн (высота и период) могут быть приближенно связаны со средними значениями высоты $\bar{H}$ и периода $\bar{T}$: $H_s = 1{,}6\bar{H}$; $T_s = 1{,}1\bar{T}$.

На *рис. 6.7* показаны спектры Бретшнейдера, соответствующие различным периодам и единичным высотам значительных волн.

Горизонтальные составляющие скорости и ускорения воды, соответствующие каждому слагаемому в выражении (6.55), могут быть определены на основании теории Эри. Полагая движение всех волн происходящим в одном направлении, можно получить следующие формулы для горизонтальных составляющих скорости v и ускорения a в направлении движения волн, соответствующие отсчитываемому от поверхности морского дна уровню y:

$$v_x = \sum_n T_v A_n \cos(k_n x - \omega_n t + \epsilon_n); \tag{6.60}$$

$$a_x = \sum_n T_a A_n \sin(k_n x - \omega_n t + \epsilon_n), \tag{6.61}$$

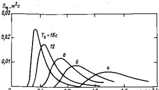


Рис. 6.7. Спектры Бретшнейдера для значительных волн единичной высоты.

где

$$T_v = \omega_n \frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{sh} k_n h}; \; T_a = -\omega_n^2 \frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{sh} k_n h}. \tag{6.62}$$

Важным моментом в данном выше представлении отклонения поверхности воды от спокойного уровня, а также скорости и ускорения частиц воды, является то, что осредненные во времени квадраты этих величин в любом положении x выражены через амплитуды спектра. Рассмотрим для примера квадрат величины отклонения поверхности η. Он может быть получен из выражения (6.55) при значении x, произвольно принятом равным нулю,

$$\eta^2 = \sum_m \sum_n A_m A_n \cos(\omega_m t - \epsilon_m) \cos(\omega_n t - \epsilon_n).$$

Проводя осреднение по времени обеих частей этого равенства и учитывая, что в силу случайного характера фазы среднее значение произведения косинусов при $m \neq n$ равно нулю, а при $m = n$ равно 0,5, с учетом выражения (6.57) получаем

$$\overline{\eta}^2 = \sum_n 0{,}5 A_n^2 = \sum_n S_\eta \Delta\omega,$$

где черта над η^2 означает осреднение по времени. В предположении, что S_η непрерывно распределено по частоте ω, последнее выражение может быть представлено в интегральной форме

$$\overline{\eta}^2 = \int_0^\infty S_\eta \, d\omega. \tag{6.63}$$

Подобным образом получим

$$\overline{v}_x^2 = \int_0^\infty S_v \, d\omega; \; \overline{a}_x^2 = \int_0^\infty S_a \, d\omega, \tag{6.64}$$

где

$$S_v = T_v^2 S_\eta; \; S_a = T_a^2 S_\eta. \tag{6.65}$$

Полученные выше квадраты осредненных величин имеют важное значение, поскольку квадратные корни из них дают среднеквадратические характеристики величин, и потому, что они могут быть использованы для оценки средних значений максимумов, которые могут иметь место в указанный временной 'интервал. В частности, если обозначить ξ величину, такую как отклонение взволнованной поверхности от спокойного уровня η, скорость воды v или ускорение a, а m_0 обозначить квадрат средних значений величины, то среднее от их максимальных значений за интервал времени T_0 выражается по Лонге-Хиггинсу [19], как

$$\bar{\xi}_{max} = [2 m_0 \ln (T_0 / T_s)]^{1/2}, \tag{6.66}$$

при этом полагается, что отношение T_0/T_s достаточно велико, например более 100.

Полученные результаты могут быть использованы для определения динамической реакции сооружения морского шельфа на случайное волнение. Будем полагать, что как скорости и ускорения воды, так и перемещения u и напряжения σ в рассчитываемом сооружении линейно связаны с амплитудой волны. Под воздействием случайного волнения они получают следующие значения:

$$u = \sum_n A_n T_n(\omega) \sin(\omega_n t + \epsilon_n'); \tag{6.67}$$

$$\sigma = \sum_n A_n T_\sigma(\omega) \sin(\omega_n t + \epsilon_n''), \tag{6.68}$$

где ϵ_n' и ϵ_n'' – случайные углы сдвига по фазе. Спектры перемещений и напряжений S_u и S_σ могут быть выражены через спектр амплитуд

$$S_u = T_u^2 S_\eta; \; S_\sigma = T_\sigma^2 S_\eta, \tag{6.69}$$

а осредненные квадраты значений перемещений и напряжений в сооружении

$$\overline{u}^2 = \int_0^\infty S_u \, d\omega; \; \overline{\sigma}^2 = \int_0^\infty S_\sigma \, d\omega. \tag{6.70}$$

Остается определить функции T_u и T_σ, входящие в полученные выше выражения. Они могут быть, в сущности, получены численно для любого сооружения с помощью расчетов, приведенных ранее для случая регулярных волн, при условии, что зависимость (6.11), используемая при определении $\hat{v}_{xi}$, будет заменена другой, не зависящей от амплитуды волны. В этом случае волновая нагрузка на сооружение будет линейно связана с амплитудой волны, а в свою очередь и перемещения платформы и любое напряжение в сооружении будут также линейной функцией от амплитуды волны, что соответствует выражениям (6.67) и (6.68).

Использовав уравнение (6.10) для случайной волны, Боргман [2] показал, что соответствующее значение $\hat{v}_{xi}$ выражается через среднее квадратическое значение скорости $v_{x,\,\text{с.к}}$:

$$\hat{v}_{xi} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\, v_{x,\,\text{с.к}} = 1{,}60 v_{x,\,\text{с.к}}, \tag{6.71}$$

где $v_{x\text{с.к}}$ находится для $y = y_m$ по формуле (6.64).

Теперь можно подобрать волны с единичной амплитудой и частотой ω так, что отклонение волновой поверхности от уровня спокойной воды будет описываться формулой

$$\eta = \cos\,(kx - \omega t). \tag{6.72}$$

Приведенным ранее способом расчета сооружения на регулярное волнение можно определить далее соответствующие перемещения u и напряжения σ и представить результаты в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 \sin\,(\omega t + \varphi_u); \\ \sigma &= \sigma_0 \sin\,(\omega t + \varphi_\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{6.73}$$

Если теперь в выражение (6.72) ввести случайный угол сдвига по фазе ϵ, то такой же угол должен быть добавлен и к углам φ_u и φ_σ, после чего эти случайные углы фазы примут значения равные, скажем, ϵ' и ϵ'' соответственно. Сравнивая это с отдельными составляющими в выражениях (6.67) и (6.68), можно увидеть, что при любой частоте ω соответствующие значения T_u и T_σ получаются как амплитуды u_0 и σ_0 в выражениях (6.73). Проведя вычисления при различных значениях частоты в диапазоне, которому отвечает существенно отличный от нуля спектр амплитуд, можно установить функции T_u, T_σ и использовать их затем в выражениях (6.69) для определения спектров отклонений волновой поверхности и напряжений. Далее по выражениям (6.70) находятся средние квадраты величин, а по ним с помощью формулы (6.66) оцениваются средние значения максимумов величин, возможные за рассматриваемый временной интервал.

В расчетах сооружений на свайном основании с использованием описанных здесь процедур необходимо, как и в случае статических или

динамических расчетов на регулярное волнение, заменить фактические погруженные в грунт сваи эквивалентными в виде свободных от контакта с грунтом стоек, имеющих на уровне поверхности морского дна жесткостные характеристики, которые соответствуют фактическим сваям и определяются изложенным в главе 5 способом. Эти характеристики обычно зависят от горизонтальной силы и изгибающего момента, которые действуют на уровне морского дна и при нерегулярном волнении изменяются с каждой новой волной. Поэтому требуются какие-то приближенные оценки жесткостей свай. Один из способов приближенной оценки жесткостных характеристик свай строится на замене высоты и периода регулярной волны параметрами значительных волн. Жесткостные характеристики эквивалентных свай, необходимые для расчета сооружения на нерегулярные случайные волны, определяются затем в результате итерационного процесса, изложенного в главе 5.

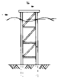


Рис. 6.8. К примеру 6.6–1.

Разумеется, при оценке возможностей перенапряжения вследствие динамического характера внешних воздействий средний максимум значений напряжений в элементах, найденный в результате выполненных расчетов, должен быть учтен совместно с вкладами от нагрузок, вызванных ветром, течением и собственным весом. Эти вклады в напряженное состояние могут быть установлены точно так же, как и в случае регулярного волнения, но при использовании средних скоростей воды, полученных по формуле (6.71) и жесткостей свай, соответствующих нерегулярному волнению.

Пример 6.6–1. Максимальное горизонтальное перемещение u (в метрах) платформы (рис. 6.8), которое вызвано регулярной волной, имеющей высоту H (в метрах) и круговую частоту ω (в радианах на секунду), может быть приближенно описано как

$$u = \frac{0{,}3 H \omega^2}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\epsilon}{\omega_1}\,\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Таблица 6.6. Результаты вычислений

ω, рад/с	u, м	S_η, м²с	S_u, м²с
0,40	0,144	0,269	0,009
0,50	0,308	3,633	0,343
0,55	0,464	5,100	1,096
0,60	0,776	5,537	3,335
0,65	1,528	5,221	12,188
0,70	2,940	4,542	39,270
0,75	1,848	3,781	12,914
0,80	1,176	3,075	4,255
0,90	0,732	1,979	1,059
1,00	0,572	1,272	0,418
1,20	0,444	0,557	0,111
1,40	0,392	0,269	0,037
1,60	0,364	0,130	0,018

Принимая $\omega_1 = 0{,}7$ рад/с; $\epsilon/\omega_1 = 0{,}05$, двухмерное случайное волнение с параметрами $H_s = 6$ и $T_s = 9$ с, определить среднее квадратическое значение перемещений платформы и средний максимум этих значений за период 6 ч.

Отклонение волновой поверхности от уровня спокойной воды описывается выражением $\eta = 0{,}5H\cos(kx - \omega t)$. Рассмотрим регулярное волнение с единичной амплитудой $(H/2 = 1)$ при различных частотах и вычислим максимальные значения перемещения палубы, используя данное выше выражение. Результаты вычислений сведены в табл. 6.6. Там же приведены параметры спектра амплитуд S_η и спектра перемещений платформы S_u, вычисленного по формуле (6.69) при $u = T_{\mathrm{п}}$. Численное интегрирование S_u в интервале значительных величин дает $\tilde{u}^2 = 3{,}98$ м^2, т. е. $u_{\text{с.к}} = 1{,}99$ м. Далее из выражения (6.66) при $T_0/T_z = 2400$, $m_0 = 3{,}98$ м^2 получим

$$\tilde{u}_{\max} = [2 \cdot 3{,}98 \ln 2400]^{1/2} \approx 7{,}87 \text{ м}.$$

6.7. Реакция сооружения на сейсмические воздействия

Сооружения морского шельфа, предназначенное для эксплуатации в сейсмически активном районе, должно быть рассчитано на возникающую в нем реакцию, обусловленную движением грунтового основания во время землетрясения. Эти расчеты могут быть выполнены с использованием тех основ динамики сооружений, которые изложены в параграфах 6,2–6.5, *при условии замены волновых нагрузок нагрузками, обусловленными ускорениями земной поверхности.*

Рассмотрим для примера простейшее по конструкции *сооружение* морского шельфа (рис. 6.9). Как и ранее, заменим погруженные в грунт сваи эквивалентными стойками, жесткостные характеристики которых могут быть установлены в результате проведения итерационного процесса, описанного для условий статики в главе 5. Движение грунта в области закрепленных концов эквивалентных свай (на уровне узлов *1* и *5*) обычно выражается через две горизонтальные и одну вертикальную составляющие *ускорения земной поверхности. Реакция сооружения на все три составляющие ускорения может быть определена как сумма реакций на каждую составляющую в отдельности.* Поскольку расчет на каждую составляющую ускорения выполняется с помощью одних и тех же процедур, ограничимся рассмотрением одного случая, когда движение грунта происходит

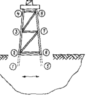


Рис. 6.9. Движение грунтового основания (показано стрелками), возбуждаемое землетрясением.

в направлении, указанном на рисунке, т. е. параллельно боковой стороне сооружения.

В *динамическом расчете сооружения снова*, как и в *случае* волновых нагрузок, *рассматриваются три подвижных* пояса *2–6*, *3–7* и *4–8*. Силы сопротивления, связанные с движением сооружения в воде, не учитываются. Чтобы проиллюстрировать основные положения расчета на сейсмические воздействия, остановимся сначала на упрощенной схеме, в которой сосредоточенные массы и силы на уровнях *2–6* и *3–7* пренебрежимо малы по сравнению с имеющимися на уровне *4–8*. Сосредоточенная масса на этом поясе обозначается m_4^*, как и составляющая в матрице масс (6.22). Она включает массы верхнего строения и части опорной конструкции m_4, а также присоединенную массу воды ρV_4, возникающую в результате ускоренного движения сооружения в воде. Горизонтальные перемещения поясов *1–5* и *4–8* обозначим соответственно u_1 и u_4.

Результирующая горизонтальная *сила* F_4, действующая на верхнюю часть *сооружения, полагается состоящей из инерционной силы* $-m_4^*\ddot{u}_4$ *и силы* сопротивления, обусловленной внутренним трением в сооружении. Последняя сила считается пропорциональной разности $\dot{u}_4 - \dot{u}_1$ скоростей верхнего и нижнего поясов сооружения. Таким образом,

$$F_4 = -m_4^*\ddot{u}_4 - C(\dot{u}_4 - \dot{u}_1), \tag{6.74}$$

где C – коэффициент сопротивления. На основании статических методов расчета (см. главу 2) усилие F_4 можно связать с относительным перемещением $u_4 - u_1$ верхнего и нижнего поясов сооружения

$$F_4 = k(u_4 - u_1), \tag{6.75}$$

где *k – соответствующий коэффициент жесткости.* Исключая F_4 из уравнений (6.74) и (6.75), получаем уравнение движения верхнего пояса сооружения

$$m_4^*\ddot{u}_4 + C(\dot{u}_4 - \dot{u}_1) + k(u_4 - u_1) = 0. \tag{6.76}$$

Обозначая относительное перемещение $u_4 - u_1$ как u и подставляя это в уравнение (6.76), получаем

$$\ddot{u} + 2\epsilon\dot{u} + \theta^2 u = -\ddot{u}_1, \tag{6.77}$$

где постоянная затухания ϵ и собственная круговая частота колебаний сооружения θ находятся из выражений

$$\epsilon = C/2m_4^*;\ \theta^2 = k/m_4^*, \tag{6.78}$$

а $\ddot{u}_1$ означает ускорение движения земной поверхности при землетрясении.

Полагая нулевыми начальные значения относительного перемещения и скорости, а затухание слабым, т. е. таким, что $\epsilon^2 \ll \theta^2$, решение уравнения (6.77) можно получить в виде

$$u = -\frac{1}{\theta}\int_0^t \ddot{u}_1(\tau)e^{-\epsilon(t-\tau)}\sin\theta(t-\tau)\,d\tau. \tag{6.79}$$

Если теперь задать закон изменения во времени ускорения $\ddot{u}_1$ грунтового основания в районе расположения сооружения, то можно проинтегрировать полученное выражение и определить время действия перемещения u. Вертикальные перемещения и углы поворота верхних узлов, также как горизонтальные, вертикальные и угловые перемещения всех остальных узлов сооружения, могут быть связаны с этим горизонтальным перемещением с помощью методов, аналогичных изложенным в параграфе 6.5, а затем могут быть вычислены напряжения в отдельных элементах. Такой подход к определению реакции сооружения на сейсмическое воздействие иногда относят к *расчету по акселерограммам.*

Одним из простейших путей установления расчетного ускорения поверхности земли в районе эксплуатации сооружения является использование акселерограммы (рис. 6.10) последнего землетрясения данной магнитуды, которая была зафиксирована в окрестности заданного района. В примере, приведенном на рисунке, максимальное ускорение земной поверхности достигало 30 % от ускорения свободного падения.

К сожалению, число имеющихся акселерограмм сильных землетрясений ограничено, и опыт показывает, что акселерограммы землетрясений одинаковой магнитуды могут очень сильно изменяться при переходе с одного места на другое даже при одинаковой удаленности их от очага землетрясения. Поэтому трудно оценить характеристики расчетных акселерограмм в случаях, когда отсутствуют записи реальных сильных землетрясений *для района, находящегося в непосредственной близости к предполагаемому месту расположения сооружения.*

Чтобы разрешить эту проблему, обычно интересуются только максимальной реакцией сооружения на землетрясение, что дает возможность

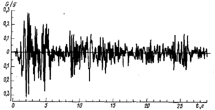


Рис. 6.10. Пример акселерограммы землетрясения, происшедшего 18.5.1940 г в Калифорнии.

получить обобщенное описание сейсмического воздействия. Это обобщение базируется на построении *спектра реакций*, определяющего реакцию сооружения на землетрясение.

Из уравнения (6.79) следует, в частности, что максимальное относительное перемещение платформы

$$u_{max} = (1/\theta)S_v, \tag{6.80}$$

где S_v – скоростной спектр реакции сооружения

$$S_v = \left[\int_0^t \ddot{u}_1(\tau)e^{-\epsilon(t-\tau)}\sin\theta(t-\tau)\,d\tau\right]_{max}. \tag{6.81}$$

Заметим, что этот спектр зависит при любом заданном законе изменения во времени ускорения земной поверхности только от собственной частоты θ (или от соответствующего периода $T = 2\pi/\theta$) колебаний сооружения и от *постоянной затухания* ϵ *Отметим также, что теперь приходится иметь* дело не с самим законом изменения ускорения во времени, а с максимальным значением интеграла от функции, в которую этот закон входит в виде множителя. В результате достигается уменьшение эффекта, связанного с различием, существующим между действительными акселерограммами землетрясений одинаковой интенсивности, и это дает возможность получить с некоторой уверенностью расчетные спектры реакции сооружений, связанные с мощностью очага землетрясения, для обширных географических районов.

Обычно в качестве расчетного критерия принимается скоростной спектр реакции или же спектр ускорений сооружения S_a, связанные между собой выражением

$$S_a = \theta S_v. \tag{6.82}$$

Типичный расчетный спектр ускорений сооружения при $\epsilon/\theta = 0{,}05$ показан на рис. 6.11. Эффективное ускорение поверхности земли G на графике дано в долях от ускорения свободного падения.

Значения действительного ускорения земной поверхности G при землетрясениях в районах морского шельфа США

	G, м/с^2
Мексиканский залив	0
Залив Кука (Аляска)	4
Пролив Санта Барбара (Калифорния)	2,5

Более подробные сведения о спектрах ускорений сооружения и соответствующих им значениях действительного ускорения земной поверхности при землетрясениях приведены в [34].

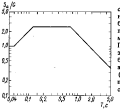


Рис. 6.11. Спектр ускорений, возбуждаемых в сооружении при затухании, равном 5 % от критического значения [34].

Если известен период T собственных колебаний сооружения, то отношение S_a/G может быть получено непосредственно по спектру ускорений, подобному изображенному на рис. 6.11. Подставляя соответствующее значение ускорения G, может быть определено значение S_a, а затем с помощью выражений (6.82) и (6.80) максимальное перемещение верхнего строения сооружения

$$u_{\max} = (1/\theta^2)S_a = (T^2/4\pi^2)\,S_a\,. \qquad (6.83)$$

После изложенного упрощенного расчета можно вернуться к сооружению, показанному на рис. 6.9, и рассмотреть более точную его расчетную схему, в которой сосредоточенные массы и силы отнесены не только к поясам *4–8*, но и к поясам *2–6* и *3–7*. Если обозначить u_2, u_3 и u_4 горизонтальные перемещения этих поясов относительно нижнего пояса (имеющего абсолютное перемещение u_1), уравнения движения по аналогии с (6.76) могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} m_2^*\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 &= F_2;\\ m_3^*\ddot{u}_3 + c_3\dot{u}_3 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 + k_{34}u_4 &= F_3;\\ m_4^*\ddot{u}_4 + c_4\dot{u}_4 + k_{42}u_2 + k_{43}u_3 + k_{44}u_4 &= F_4, \end{aligned}\right\} \qquad (6.84)$$

где m^* – сосредоточенные массы соответствующих поясов сооружения; c – коэффициенты затухания; k – коэффициенты жесткости, а сосредоточенные усилия

$$F_2 = -m_2^*\ddot{u}_1;\ F_3 = -m_3^*\ddot{u}_1;\ F_4 = -m_4^*\ddot{u}_1. \qquad (6.85)$$

Как и в параграфе 6.2, будем полагать далее, что коэффициенты сопротивления пропорциональны соответствующим сосредоточенным массам, и запишем полученные выше уравнения в матричной форме

$$[m^*]\{\ddot{u}\} + 2\epsilon\,[m^*]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}\,. \qquad (6.86)$$

Эти уравнения могут быть решены методом разложения перемещений по собственным формам колебаний, изложенным в параграфе 6.3. В частности, используя выражение (6.29), сначала можно определить собственные круговые частоты ω_1, ω_2, ω_3 колебаний сооружения в виде $\lambda_1 = \omega_1^2$, $\lambda_2 = \omega_2^2$ и $\lambda_3 = \omega_3^2$ вместе с соответствующими им формами $u_{01}(\lambda_1)$,

$u_{02}(\lambda_2)$ и т. д. Далее формируется матрица форм $[P]$ в соответствии с (6.33) и вводятся новые переменные Y_1, Y_2, Y_3, такие, что

$$\{u\} = [P]\,\{Y\}\,. \qquad (6.87)$$

Теперь уравнение (6.86) можно представить иначе:

$$[m']\{\ddot{Y}\} + 2\epsilon[m']\{\dot{Y}\} + [K']\{Y\} = \{F'\}, \qquad (6.88)$$

где $[m']$ и $[K']$ – диагональные матрицы, заданные выражениями

$$[m'] = [P]^{\mathrm{T}}[m^*][P]; \qquad (6.89)$$

$$[K'] = [P]^{\mathrm{T}}[K][P] = [m'][\lambda]; \qquad (6.90)$$

$[\lambda]$ – диагональная матрица, ненулевые компоненты которой равны λ_1, λ_2, λ_3;

$$\{F'\} = [P]^{\mathrm{T}}\{F\}. \qquad (6.91)$$

Матричное уравнение (6.88) может быть представлено в виде трех независимых уравнений относительно Y_1, Y_2 и Y_3. Решения этих уравнений записываются аналогично (6.79)

$$Y_n = \frac{1}{m_n'\,\omega_n}\int_0^t F_n'(\tau)e^{-\epsilon(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \qquad (6.92)$$

при $n = 1, 2, 3$ соответственно. Подставляя выражения (6.85) составляющих матрицы $\{F\}$ в равенство (6.91), можно выразить последние результаты через ускорение земной поверхности

$$Y_n = -\frac{a_n}{m_n'\,\omega_n}\int_0^t \ddot{u}_1(\tau)e^{-\epsilon(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau, \qquad (6.93)$$

где

$$a_n = u_{02}(\lambda_n)m_2^* + u_{03}(\lambda_n)m_3^* + u_{04}(\lambda_n)m_4^*. \qquad (6.94)$$

Если зависимость $\ddot{u}_1$ от времени известна или принята, решения для Y_1, Y_2, Y_3 могут быть получены из уравнения (6.93), а горизонтальные перемещения отдельных поясов подсчитаны по формуле (6.87).

Альтернативой этому методу является построение спектра реакций и определение максимальных значений Y_1, Y_2 и Y_3 по расчетному спектру ускорений сооружения, подобному показанному на рис. 6.11. Сопоставляя формулы (6.93) и (6.79) и используя (6.83), можно получить в частности

$$Y_{n,\max} = \frac{a_n}{m_n'\omega_n^2}S_{an}, \qquad (6.95)$$

где S_{an} – ускорение сооружения, соответствующее частоте ω_n. Максимально возможные значения горизонтальных перемещений различных поясов сооружения могут быть определены из выражения (6.87), если предположить, что все максимальные значения Y_1, Y_2 и Y_3 могут быть отмечены в один и тот же момент времени. Так, перемещения верхнего пояса

$$u_4 = u_{04}(\lambda_1)\,Y_1 + u_{04}(\lambda_2)\,Y_2 + u_{04}(\lambda_3)\,Y_3. \qquad (6.96)$$

Поскольку в общем случае максимум значений Y_1, Y_2 *и* Y_3 *не может наступать одновременно*, то иногда перемещения вычисляются как корень квадратный из суммы квадратов вкладов от отдельных форм колебаний. *В этом случае вместо (6.96) получается решение вида*

$$u_4 = \left\{[u_{04}(\lambda_1)\,Y_1]^2 + [u_{04}(\lambda_2)\,Y_2]^2 + [u_{04}(\lambda_3)\,Y_3]^2\right\}^{1/2}. \qquad (6.97)$$

По максимальным значениям горизонтальных перемещений отдельных поясов сооружения можно определить соответствующие им максимальные значения вертикальных перемещений и углов поворота всех узлов (см. параграф 6.5) и по ним вычислять максимальные напряжения в отдельных элементах. Эти напряжения должны суммироваться с напряжениями, обусловленными горизонтальным ускорением земной поверхности в направлении, перпендикулярном к уже рассмотренному, а также с напряжениями, вызванными вертикальным ускорением. В результате будут получены максимальные напряжения в сооружении от сейсмического воздействия. Разумеется, к этим напряжениям должны быть добавлены напряжения от нагрузок, связанных с собственным весом сооружения, и полученные результаты необходимо сопоставить с допускаемыми значениями. В расчетной практике не принято суммировать напряжения, обусловленные землетрясением, с напряжениями от штормового волнения, поскольку расчет сооружения одновременно на сейсмическое и волновое воздействие был бы весьма неэкономичным из-за очень малой вероятности совпадения этих двух неблагоприятных условий.

Пример 6.7–1. Рассмотрим стальное сооружение (рис. 6.12) и исследуем его реакцию на движение земной поверхности при землетрясении, используя спектр ускорений, приведенный на рисунке, при заданных значениях $G = 2{,}5$ м/с^2. Матрицы сосредоточенных *масс* $[m^*]$ *(в тоннах) и жесткости* $[K]$ *(в меганьютонах на метр)* системы имеют следующий вид:

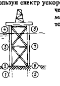


Рис. 6.12. К примеру 6.7–1.

$$[m^*] = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 420 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 244 & -239 & 51 \\ -239 & 445 & -207 \\ 51 & -207 & 156 \end{bmatrix}.$$

По заданным матрицам масс и жесткости системы из уравнений (6.29) находятся следующие

значения собственных частот и отвечающие им формы колебания:

$$\omega_1 = 5{,}45 \text{ рад/с};\ u_{02} = 0{,}604;\ u_{03} = 0{,}813;\ u_{04} = 1{,}00;$$

$$\omega_2 = 20{,}9 \text{ рад/с};\ u_{02} = -2{,}05;\ u_{03} = -1{,}09;\ u_{04} = 1{,}00;$$

$$\omega_3 = 44{,}7 \text{ рад/с};\ u_{02} = 5{,}62;\ u_{03} = -3{,}95;\ u_{04} = 1{,}00.$$

Отсюда получаем матрицу форм

$$[P] = \begin{bmatrix} 0{,}60 & -2{,}05 & 5{,}62 \\ 0{,}81 & -1{,}09 & -3{,}95 \\ 1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

и матрицу $[m']$ в выражении (6.89), диагональные элементы которой $m_1' = 981{,}2$ т; $m_2' = 2011{,}5$ т; $m_3' = 13\,816$ т.

Далее по формулам (6.94) вычисляем *коэффициенты* a_1, a_2 *и* a_3:

$$a_1 = 0{,}60 \cdot 210 + 0{,}81 \cdot 420 + 630 = 1096{,}2 \text{ т};$$

$$a_2 = -2{,}05 \cdot 210 - 1{,}09 \cdot 420 + 630 = -258{,}3 \text{ т};$$

$$a_3 = 5{,}62 \cdot 210 - 3{,}95 \cdot 420 + 630 = 151{,}2 \text{ т}.$$

По значениям периодов, соответствующих частотам ω_1, ω_2, ω_3, равных *соответственно* 1,15; 0,300 и 0,140 с, по графику на рис. 6.11 при $G = 2{,}5$ м/с получим ускорения сооружения вызванные землетрясением: $S_{a1} = 4{,}39$; $S_{a2} = 6{,}10$; $S_{a3} = 6{,}10$ м/с. Соответствующие им максимальные значения Y_1, Y_2 и Y_3 находим по формуле (6.95)

$$Y_1 = \frac{1096{,}2 \cdot 4{,}39}{981{,}2 \cdot 29{,}7} = 165 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_2 = \frac{258{,}3 \cdot 6{,}10}{2011{,}5 \cdot 436} = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_3 = \frac{151{,}2 \cdot 6{,}10}{1381{,}6 \cdot 1998} = 0{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

И, наконец, определим по выражению (6.87) максимальные горизонтальные перемещения поясов *2, 3 и 4*, полагая, что Y_1, Y_2 и Y_3 *достигают* максимальных значений одновременно: $u_2 = 0{,}097$ м; $u_3 = 0{,}130$ м; $u_4 = 0{,}167$ м.

Задачи

1. Все четыре стороны гибкой стальной конструкции опорного основания буровой платформы одинаковы. На рис. 6.13 изображена боковая сторона платформы. Вертикальные элементы имеют внешний диаметр 1,22 м, а горизонтальные 0,61 м. Построить матрицу волновых нагрузок (в килоньютонах) на пояса *2–5* и *3–6*, соответствующую волне высотой 12 м и периодом 9 с.

Ответ:

$$\begin{Bmatrix} F_2^* \\ F_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 145\sin(-\omega t + 1{,}34) \\ 161\sin(-\omega t + 1{,}71) \end{Bmatrix}.$$

2. Построить матрицу масс $[m^*]$ (в тоннах), сосредоточенных на поясах *2–5* и *3–6* сооружения, рассмотренного в задаче 1, при условии, что вес верхнего строения равен 8,9 МН. Толщина стенки вертикальных элементов равна 40 мм, а горизонтальных 12 мм. Нижние вертикальные и горизонтальные элементы заполнены водой полностью, а верхние элементы -- только до уровня спокойной воды.

Ответ:

$$[m^*] = \begin{bmatrix} 213 & 0 \\ 0 & 538 \end{bmatrix}.$$

3. По результатам статического расчета сооружения, рассмотренного в задаче 1, при нагрузке $F_{2x}^{\Sigma} = 1$ кН и равенстве нулю всех остальных усилий, осредненные перемещения на поясах *2–5* и *3–6* равны соответственно $u_2 = 9{,}11 \cdot 10^{-3}$ м; $u_3 = 12{,}33 \cdot 10^{-3}$ м.

Аналогично при $F_{3x}^{\Sigma} = 1$ кН и равных нулю всех остальных усилиях $u_2 = 12{,}33 \cdot 10^{-3}$ м; $u_3 = 36{,}46 \cdot 10^{-3}$ м.

Используя эти данные, построить матрицу жесткости (в меганьютонах на метр) системы, связывающую горизонтальные нагрузки на пояса *2–5* и *3–6* с горизонтальными перемещениями этих же поясов.

Ответ:

$$[K] = \begin{bmatrix} 5{,}31 & -1{,}79 \\ -1{,}79 & 0{,}875 \end{bmatrix}.$$

4. Определить с помощью уравнений (6.29) частоты свободных колебаний и отвечающие им формы колебаний сооружения, рассмотренного в задаче 1, используя результаты решения задач 2 и 3.

Ответ: $\omega_1 = 0{,}693$ рад/с; $u_{02}/u_{03} = 0{,}345$; $\omega_2 = 5{,}11$ рад/с; $u_{02}/u_{03} = -7{,}60$.

5. Определить выражения для горизонтальных перемещений u_2, из поясов *2–5* и *3–6* сооружения, рассмотренного в задаче 1, используя результаты решения задач 1–4 и полагая $\epsilon/\omega_1 = 0{,}08$.

Ответ: $u_2 = 1{,}64\sin(-\omega t - 3{,}0)$ м; $u_3 = 4{,}75\sin(-\omega t - 3{,}0)$ м.

6. Статические расчеты сооружения, рассмотренного в задаче 1, дают следующие значения перемещений узла *2*: при $F_{2x}^{\Sigma} = 1$ кН и равных нулю всех остальных нагрузках $v_2 = 0{,}121 \cdot 10^{-6}$ м; $\theta_2 = 24{,}5 \cdot 10^{-6}$ рад.

Аналогично при $F_{3x}^{\Sigma} = 1$ кН и равенстве нулю всех остальных нагрузок $v_2 = 0{,}423 \cdot 10^{-6}$ м; $\theta_2 = 65{,}6 \cdot 10^{-6}$ рад.

Используя результаты решения задачи 3, построить матрицу, связывающую вертикальное перемещение и угол поворота узла *2* с горизонтальными перемещениями поясов *2–5* и *3–6*.

Ответ:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0{,}115 & 0{,}154 \\ 12{,}67 & 13{,}55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

7. Определить максимальное напряжение от изгибающего момента в узле 1 элемента *1–2* сооружения, рассмотренного в задаче 1, используя решения задач 5 и 6.

Ответ: $\sigma = 0{,}64$ ГПа.

8. Подсчитать максимальные перемещения $u_{2,\,\text{ст}}$ и $u_{3,\,\text{ст}}$ в сооружении, рассмотренном в задаче 1, в условиях статического нагружения, т. е. пренебрегая силами инерции и сопротивления и используя матричное уравнение $[K]\{u_{\text{ст}}\} = \{F^*\}$, в котором значения нагрузок также соответствуют условиям задачи 1.

9. Определить коэффициент динамичности для перемещений верхнего строения сооружения, рассмотренного в задаче 1, используя результаты решения задач 5 и 8.

Ответ: $u_3/u_{3,\,\text{ст}} = 6{,}2$.

10. Сравнить результат решения задачи 9 с результатами, которые получены упрощенным способом, описанным в параграфе 4.10. Использовать исходные данные к задаче 3.

Ответ: $u_3/u_{3,\,\text{ст}} = 5{,}8$ (по рекомендациям главы 4).

11. Определить максимальные значения напряжений от изгиба в узле *1* элемента *1–2* сооружения, рассмотренного в задаче 1, в условиях статического нагружения.

Ответ: $\sigma = 0{,}116$ ГПа.

12. Схеме сооружения в виде одиночной колонны, заглубленной в грунт (рис. 6.14), соответствуют следующие матрицы жесткости $[K]$ (в меганьютонах на метр) и масс $[m^*]$ (в тоннах):

$$[K] = \begin{bmatrix} 35{,}12 & -13{,}88 & 3{,}31 \\ -13{,}88 & 10{,}71 & -3{,}74 \\ 3{,}31 & -3{,}74 & 1{,}59 \end{bmatrix};$$

$$[m^*] = \begin{bmatrix} 2{,}80 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}11 & 0 \\ 0 & 0 & 13{,}64 \end{bmatrix}.$$

Определить круговые частоты и формы свободных колебаний системы.

Ответ:

$\omega_1 = 3{,}14$ рад/с; $u_{02}/u_{04} = 0{,}0918$; $u_{03}/u_{04} = 0{,}470$;

$\omega_2 = 30{,}7$ рад/с; $u_{02}/u_{04} = -2{,}38$; $u_{03}/u_{04} = -4{,}96$;

$\omega_3 = 117$ рад/с; $u_{02}/u_{04} = 32{,}9$; $u_{03}/u_{04} = -7{,}73$.

13. Получить частоты и формы свободных колебаний в задаче 4 с помощью итераций.

14. Определить круговые частоты и формы свободных колебаний системы в примере 6.7–1 с помощью итераций.

15. Определить среднее квадратическое значение отклонения волновой поверхности от уровня спокойной воды при случайном одномерном волнении, которому соответствует спектр Бретшнейдера, при $H_S = 6$ м и $T_S = 8$ с.

Ответ: $\eta_{\text{с.к}} = 1{,}5$ м.

16. При параметрах волнения, указанных в задаче 15, и глубине воды 210 м определить среднее квадратическое значение горизонтальной скорости на уровне спокойной воды. (Указание: считать $\operatorname{th} k_n h \approx 1$ и интегрировать выражение (6.64) непосредственно. Доказать справедливость этого упрощения.)

Ответ: $v_{\text{с.к}} = 1{,}44$ м/с.

17. При параметрах волнения, указанных в задаче 15, определить средний максимум отклонений волновой поверхности за 12 ч.

Ответ: $\eta_{\max} = 6{,}31$ м.

18. Максимальное напряжение от изгиба в сечении 1 элемента *1–2* сооружения, показанного на рис. 6.15, приближенно определяется через параметры регулярного волнения – высоту H (в метрах) и круговую частоту ω (в радианах на секунду) с помощью выражения

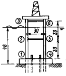


Рис. 6.13. К задаче 1.

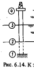


Рис. 6.14. К задаче 12.

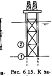


Рис. 6.15. К задаче 18.

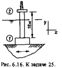


Рис. 6.16. К задаче 25.

$$\sigma = \frac{333H\omega^2}{\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\epsilon}{\omega_1}\,\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right\}^{1/2}},$$

где σ – в килопаскалях.

Полагая $\omega_1 = 1{,}25$ рад/с, $2\epsilon/\omega_1 = 0{,}1$, определить среднее квадратическое значение σ при нерегулярном волнении с параметрами $H_S = 10{,}5$ м и $T_S = 10$ с, используя спектр Бретшнейдера.

19. Используя среднее квадратическое значение напряжения, найденное из решения задачи 18, подсчитать средний максимум напряжений за 12 ч.

20. Определить среднее квадратическое значение напряжения от изгиба в сечении *1* элемента *1–2* сооружения, рассмотренного в задаче 1, при одномерном случайном волнении с параметрами $H_S = 6$ м и $T_S = 9$ с. Принять значения $v_{\text{с.к}}$ на уровне *2–5* и уровне спокойной воды равными соответственно 0,6 и 1,8 м/с.

21. Используя решение задачи 20, определить средний максимум значений напряжений за 6 ч.

Ответ: $\overline{\sigma}_{\text{с.к}} = 264$ МПа.

22. Высота и период расчетной регулярной волны, как правило, полагаются равными $2H_S$ и T_S, где H_S и T_S – параметры значительных нерегулярных волн в штормовых условиях. Имея это в виду, сопоставить результаты решений задач 21 и 7 и объяснить, почему при регулярном волнении получены большие значения напряжений.

23. Движение грунтового основания, связанное с землетрясением, приближенно описывается выражением $\ddot{u}_1 = 3 \sin 12t$.

Непосредственным или численным интегрированием выражения (6.79) определить максимальное перемещение верхнего строения сооружения, имеющего собственную частоту колебаний $\theta = 3{,}0$ рад/с.

24. Определить максимальное смещение верхнего строения сооружения из задачи 23, используя спектр реакций, приведенный на рис. 6.11, при $G = 4$ м/с².

Ответ: $u_{\max} \approx 1{,}40$ м.

25. Бетонное гравитационное сооружение, показанное на рис. 6.16, имеет верхнее строение массой 220 т. Масса колонны вместе с присоединенной массой воды составляет 300 т. Полагая собственную частоту колебаний сооружения, соответствующей выражению $\theta^2 = 3EI/M_2^* l^3$ при $E = 27{,}5$ ГПа и $I = 93{,}4$ м⁴, определить:

а) максимальное перемещение верхнего строения в направлении x при землетрясении ($G = 4$ м/с²), используя спектр реакций на рис. 6.11;

б) максимальные напряжения в основании колонны, связанные с изгибом.

26. Определить горизонтальные перемещения поясов *2–5* и *3–6* сооружения, рассмотренного в задаче 1 при землетрясении ($G = 4$ м/с²), используя спектр реакций на рис. 6.11.

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

1. Определители

Определитель n-го порядка записывается в виде массива чисел, называемых *элементами*, из n строк и n столбцов

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель имеет единственное значение, которое вычисляется как алгебраическая сумма всех возможных произведений из n сомножителей. При этом выполняются следующие условия:

1) каждое слагаемое содержит в качестве сомножителей только по одному элементу из каждой строки и каждого столбца;

2) каждое слагаемое имеет знак плюс или минус в зависимости от четности или нечетности соответственно числа инверсий (большее число соответствует меньшему) в ряду первых индексов, получающегося после записи сомножителей в порядке возрастания вторых индексов.

Из первого условия следует, что общее число слагаемых равно $n(n-1)(n-2)\dots 1$, а знак каждого из них определяется по второму условию.

Рассмотрим для примера определитель второго порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Значение определителя складывается из $2 \times 1 = 2$ слагаемых. Запишем их так, чтобы вторые индексы (соответствующие номерам столбцов) расположились в порядке возрастания: $a_{11}a_{22}$, $a_{21}a_{12}$. В первом слагаемом первые индексы (соответствующие номерам строк) стоят в порядке возрастания, т. е. здесь инверсии нет. Во втором слагаемом первые индексы стоят в порядке 2,1, т. е. имеется одна инверсия. Таким образом, значение определителя находится как

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Рассмотрим теперь определитель третьего порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Здесь значение определителя складывается из $3 \times 2 \times 1 = 6$ слагаемых. Снова запишем их так, чтобы вторые индексы расположились в порядке возрастания

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \qquad a_{31}a_{12}a_{23}, \qquad a_{21}a_{32}a_{13},$$

$$a_{31}a_{22}a_{13}, \qquad a_{21}a_{12}a_{33}, \qquad a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Число инверсий в ряду первых индексов равно 0, 2, 2, 3, 1, 1 соответственно. Таким образом, $D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{13}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$

Алгебраическое дополнение c_{ij} элемента a_{ij} определителя выражается как $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$, где m_{ij} – минор элемента a_{ij}, представляющий собой определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием из i-й строки и j-го столбца в определителе n-го порядка. Отсюда следует, что определитель n-го порядка можно выразить через алгебраические дополнения

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij},$$

где i в первой сумме и j во второй могут иметь любое значение от 1 до n.

Пример. Дан определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Использовав первую сумму в приведенном выше выражении, получим при $i = 1$

$$D = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{11} + a_{13}c_{13},$$

где

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(12-2) = 10;$$

$$c_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4;$$

$$c_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +(1-0) = 1.$$

Таким образом, $D = 2(10) + 1(-4) + 3(1) = 19$.

2. Матрицы

Прямоугольная таблица чисел, расположенных в виде m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$. Например,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

является матрицей размера 3 х 4. В отличие от определителя матрица не имеет конкретного значения. Это есть просто массив чисел или символов каких-то величин.

Матрица называется *квадратной*, если у нее число строк равно числу столбцов. Она может именоваться как матрица размера $n \times n$ или как матрица n-го порядка. Квадратную матрицу называют *симметричной*, если элементы с верхней и правой половины могут быть получены поворотом матрицы вокруг главной диагонали, например

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

У матрицы-строки $m = 1$, т. е. $[A] = [a_1 a_2 a_3]$, а у матрицы-столбца $n = 1$, т. е.

$$\left\{ A \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\}.$$

Отметим, что в отличие от других матриц для обозначения матриц-столбцов используются фигурные скобки.

Диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю,

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Единичная матрица $[I]$ – это диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице.

Матрица $[A]^{\mathrm{T}}$ является *транспонированной* по отношению к матрице $[A]$, если строки одной из них являются столбцами другой. Например,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}; \quad [A]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Минор m_{ij} и алгебраическое дополнение c_{ij} квадратной матрицы находятся как минор и алгебраическое дополнение определителя, образованного из матрицы.

Если каждый элемент квадратной матрицы $[A]$ заменить его алгебраическим дополнением, а затем транспонировать матрицу алгебраических дополнений, то полученная таким образом матрица будет присоединенной к матрице $[A]$. Так, если матрица алгебраических дополнений элементов матрицы $[A]$ имеет вид

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

то присоединенная к $[A]$ матрица есть

$$adj\,[A] = [C]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Операции над матрицами. Две матрицы, имеющие одинаковое число строк и столбцов, могут быть сложены суммированием соответствующих их элементов. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Произведением двух матриц $[A]$ и $[B]$ является новая матрица $[C]$

$$[C] = [A][B],$$

элемент c_{ij} которой получается перемножением элементов i-й строки матрицы $[A]$ на соответствующие им элементы j-го столбца матрицы $[B]$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Например,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$[C] = [A][B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 0 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что для возможности умножения матриц число строк в матрице $[B]$ должно равняться числу столбцов в матрице $[A]$. Заметим, что $[A][B] \neq [B][A]$.

Результатом умножения матрицы $[A]$ на скаляр c является матрица, имеющая элементы, соответствующие элементам $[A]$ и умноженные на c. Например,

$$c[A] = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

Результатом умножения матрицы на матрицу-столбец справа является матрица-столбец. Так,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 20 \\ 11 \end{Bmatrix}.$$

Результатом умножения матрицы на матрицу-строку (или на транспонированную матрицу-столбец) слева является матрица-строка, т. е.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = [8 \quad 18 \quad 13].$$

Матрица $[A]^{-1}$, являющаяся обратной по отношению к квадратной матрице $[A]$, удовлетворяет следующему условию: $[A]^{-1}[A] = [A][A]^{-1} = [I]$, а если матрица $[A]$ ортогональная, то $[A]^{T}[A] = [A][A]^{T} = [I]$.

Из определения обратной матрицы следует, что для ортогональной матрицы справедливо равенство $[A]^{T} = [A]^{-1}$.

Обратная матрица определяется соотношением

$$[A]^{-1} = (1/A)\, adj\, [A],$$

где A – значение определителя из элементов матрицы $[A]$.

Обратим для примера матрицу

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $A = 6$. Алгебраические дополнения элементов матрицы находим как

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 1;$$

$$c_{12} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -4$$

и т. д.

Таким образом, матрица алгебраических дополнений имеет вид

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Присоединенная матрица получается транспонированием матрицы $[C]$. Теперь находим обратную матрицу

$$[A]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/3 & -1/2 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 5/6 & -2/3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Блочные матрицы. Матрицы могут быть разделены на блоки горизонтальными и вертикальными линиями, как показано на следующем ниже примере:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & -1 & -5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} [A] & B \\ [C] & [D] \end{bmatrix},$$

где блоки

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad [C] = [3 \quad -1]; \quad [D] = [-5].$$

Блочные матрицы, если рассматривать их блоки как элементы, подчиняются тем же правилам сложения и умножения, что и обычные матрицы.

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3, \end{aligned}\right\}$$

в которой a и y заданы, а x неизвестны. Эти уравнения можно представить в матричной форме

$$[A]\{X\} = \{Y\},$$

где

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}; \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Умножив обе части матричного равенства на $[A]^{-1}$, получим

$$[A]^{-1}[A]\{X\} = [A]^{-1}\{Y\}.$$

Но по определению $[A]^{-1}$ имеем $[A]^{-1}[A] = [I]\{X\} = \{X\}$. Отсюда $\{X\} = [A]^{-1}\{Y\}$, т. е. для получения решения относительно x_1, x_2, x_3 необходимо найти матрицу, обратную по отношению к $[A]$, и умножить ее на матрицу-столбец $\{Y\}$.

Аналогичные процедуры выполняются и при решении системы с n неизвестными. Матричные операции, в том числе обращение, удобно выполнять с помощью компьютеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bea R. G.** Gulf of Mexico hurricane wave heights. – Proc. VI Annual Offshore Technology Conference, 1974, p. 791–810.
2. **Borgman L.** Spectral analysis of ocean wave forces on piling. – J. of the Waterways and Harbour Div., ASCE, 1967, vol. 93, p. 129–156.
3. **Bretschneider C. L.** Wave variability and wave spectra for wind generated gravity waves. – US Army Corps of Eng. Beach Erosion Board Memorandum, 1959, N 118.
4. **Bretschneider C. L.** Overwater wind and wind forces. – Handbook of ocean and underwater engineering (ed Myers J. J. et al.), McGraw-Hill, N-Y, 1969.
5. **Building** code requirements for reinforced concrete. – Amer. Concrete Inst. Publication, Detroit, Mich., 1977, vol. 318.
6. **Chakrabarti S. K., Tam W. A., Wolbert A. L.** Wave forces on a randomly oriented tube. – Proc. VII Annual Offshore Technology Conference, 1975, p. 433–441.
7. **Cox W. R., Kraft L. M., Verner E. A.** Axial loads tests on 14-inch pipe piles in clay. – Proc. VIII Annual Offshore Technology Conference, 1979, p. 1147–1151.
8. **Coyle H. M., Reese L. C.** Load transfer for axially loaded piles in clay. – J. Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 1966, vol. 92, p. 1–26.
9. **Dawson T. H.** Simplified analysis of offshore piles under cyclic lateral loads. – Ocean Engineering, 1980, vol. 7, p. 553–562.
10. **Fowler J. W.** Construction of the Chesapeake light station. – J. Civil Engineering, 1965, vol. 35, p. 76.
11. **Funston N. E., Hall W. J.** Footing vibration with nonlinear subgrade support. – J. Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 1967, vol. 93, p. 191–211.
12. **Gaylord E. H., Gaylord C. N.** Design of steel structures. – McGraw-Hill, N-Y, 1972.
13. **Guilde** for the design and construction of fixed offshore concrete structures. – J. Amer Concrete Inst., 1978, vol. 75, N 12, p. 684–709.
14. **Kinsman B.** Wind waves. – Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1965.
15. **Lee G. C.** Offshore structures–past, present, future and design consideration. – J. Offshore, 1968, vol. 28, N 6, p. 45–55.
16. **Lee G. C.** Recent advances in design and construction of deepwater platforms. P. I. – J. Ocean Industry, 1980, Now., p. 71–80.
17. **Lee G. C.** Recent advances in design and construction of deepwater platforms. P. II. – J. Ocean Industry, 1981, Febr., p. 78–82.
18. **Lin T. Y.** Design of prestressed concrete. – John Wiley and Sons, N-Y, 1963.
19. **Longuet-Higgins M. S.** On the statistical distribution of the heights of sea waves.– J. of Marine Research, 1952, vol. 11, p. 245–266.
20. **MacCamy R. C., Fuchs R. W.** Wave forces on piles. A diffraction theory. – US Army Corps of Eng. Techn. Memorandum, 1954, N 69.
21. **Maddox N. R., Wildenstein A. N.** A spectral fatigue analysis for offshore structures. – Proc. VII Annual Offshore Technology Conference, 1975, p. 185–193.
22. **Martin H. C.** Introduction to matrix methods of structural analysis. – McGraw-Hill, N-Y, 1966.
23. **Mashburn M. K., Hubbard J. L.** An ocean structure. – Proc. Conf. Civil Eng. in the Oceans, ASCE, San Francisco, 1967, p. 183–202.

24. **Matlock H.** Correlation for design of laterally loaded piles in soft clay. – Proc. II Annual Offshore Technology Conference, 1970, p. 577–587.
25. **McClelland B., Focht J. A., Emrich W. J.** Problems in design and installation of heavily loaded pipe piles. – Proc. Conf. Civil Eng. in the Oceans, ASCE, 1967, p. 601–634.
26. **McClelland B.** Design of deep penetration piles for ocean structures. – J. of the Geotechn. Eng. Div., ASCE, 1974, vol. 100, p. 709–747.
27. **McCormick M. E.** Ocean engineering wave mechanics. – John Wiley, N-Y, 1973.
28. **McGuire W.** Steel structures. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N-Y, 1968.
29. **Milne-Thomson L. M.** Jacobian elliptic function tables. – Dover Publications, N-Y, 1950.
30. **Mogridge G. R., Jamieson W. W.** Wave loads on large circular cylinders a design method. – Nation Research Council Report, NRC, 1976, N 15827.
31. **Morison J. R., O'Brien M. P., Johnson J. W., Schaaf S. A.** Forces exerted by surface waves in piles. – Petroleum Transact. Amer. Inst. of Mining Eng., 1950, vol. 189, p. 149–154.
32. **Olsen O. A.** Wind, wave and current forces on offshore structures. – The Techn. of Offshore Drilling, Completion and Production. The Petroleum Publ. Comp., Tulsa, Okla., 1976.
33. **Pierson W. S., Moskowitz L.** A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. – US Navy Oceanography Office Report, 1963, N 62306–1042.
34. **Recommended** practice for planning, designing and constructing fixed offshore platforms. – Amer. Petrol. Inst. Publ. RP-2A, Dallas, Tex., 1980.
35. **Reese L. C., Cox W. R., Koop F. D.** Analysis of lateral loaded piles in sand. – Proc. VI Annual Offshore Technology Conference, 1974, p. 473–483.
36. **Reese L. C., Cox W. R.** Pullout tests of piles in sand. – Proc. VIII Annual Offshore Technology Conference, 1976, p. 527–538.
37. **Rolfes M. H.** Wave forces and structural response. – Trident Scholar Project Report. US Naval Academy, Annapolis, 1980, N 108.
38. **Ruffin J. V.** Steel offshore towers replace lightships. – J. Civil Engineering, 1965, vol. 35, p. 72.
39. **Skjelbreia L.** Gravity waves, Stokes third order approximation. Tables of functions. Council on Wave research. – Univ. of California. Berkeley, 1959.
40. **Skjelbreia L., Hendrickson A.** Fifth order gravity wave theory. – Proc. VII Conference on Coastal Engineering, 1961, p. 184–196.
41. **Specifications** for the design, fabrication and erection of structural steel building. – Amer. Inst. of Steel Constr. N-Y, 1969.
42. **Thom H. C.** New distribution of extreme winds in the United States. – J. of the Structural Div., ASCE, 1968, vol. 94, p. 1787–1801.
43. **Wade B. G., Dwyer M.** On the application of Morison's equation to fixed offshore platforms. – Proc. VIII Annual Offshore Technology Conference, 1976, p. 1181–1186.
44. **Watt B. J.** Basis structural systems – a review of their design and analysis requirements. – Numerical methods in offshore engineering (ed. Zienkiewich O. C. et al.). John Wiley, N-Y, 1978, p. 1–42.
45. **Weigel R. L.** A presentation of choidal wave theory for practical application – J. of Fluid Mech., 1960, vol. 7, p. 273–286.
46. **Weigel R. L.** Oceanographical Engineering. – Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N-Y, 1964.
47. **Willems N., Lucas W. M.** Matrix analysis for structural engineering. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N-Y, 1968.
48. **Wind** forces on structures. – Transactions ASCE, 1961, vol. 126, p. II, p. 1124.
49. **Winter G., Nilson A. H.** Design of concrete structures. – McGraw-Hill, N-Y, 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Серия „Техника освоения океана"

Томас Доусон

ПРОЕКТИРОВАНИЕ
СООРУЖЕНИЙ
МОРСКОГО ШЕЛЬФА

Перевод с английского В. А. Смелова и К. Н. Шхинека

Заведующий редакцией *И. Г. Русецкий*
Редактор *Н. П. Саяпина*
Художественный редактор *О. П. Андреев*
Технический редактор *Е. А. Перцева*
Корректоры *Т. С. Александрова, А. И. Оныщак, В. Ю. Самохина*
Переплет художника *Б. Н. Осенчакова*
ИБ № 1162

Подписано в печать 18.08.86. Формат 60 x 90 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 18,0. Усл. кр.-отт. 18,0. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж 1580 экз. Изд. № 4016–84. Заказ 566
Цена 1 р. 60 к.

Набрано в издательстве „Судостроение" на композере типа ИБМ МС операторами Т. В. Лебедевой и В. В. Михайловой

Издательство „Судостроение", 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Тула, пр. Ленина, 109.